

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

НЕЛІНІЙНІ ТА ДИСКРЕТНІ СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

КУРС ЛЕКЦІЙ

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою
«Електромеханічні системи автоматизації, електропривод та
електромобільність» спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та
електромеханіка»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2019

Нелінійні та дискретні системи автоматичного керування: Курс лекцій [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: Б. І. Приймак. – Електронні текстові дані (1 файл: 4,07 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 198 с.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 2 від 31.10.2019 р.)
за поданням Вченої ради Факультету електроенерготехніки та автоматики (протокол № 3 від 28.10.2019 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

НЕЛІНІЙНІ ТА ДИСКРЕТНІ СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ КУРС ЛЕКЦІЙ

Укладач: *Приймак Богдан Іванович*, канд. техн. наук, доц.

Відповідальний редактор: *Толочко О. І.*, док. техн. наук, проф.

Рецензент: *Головко В. М.*, док. техн. наук, проф., професор кафедри відновлювальних джерел енергії факультету електроенерготехніки та автоматики КПІ ім. Ігоря Сікорського

Подано матеріал лекцій дисципліни «Нелінійні та дискретні системи автоматичного керування». Викладено основні точні та наближені методи дослідження нелінійних систем автоматичного керування (САК). Розглянуто застосування нелінійних ланок для коригування та компенсування природних нелінійностей САК. Висвітлено основи математичного апарату дискретного перетворення Лапласа та z-перетворення. Наведено методи отримання дискретних передатних функцій та рівнянь стану. Розглянуто частотні характеристики, критерії стійкості та синтез цифрових регуляторів дискретних САК.

Курс лекцій призначений для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Електромеханічні системи автоматизації, електропривод та електромобільність» спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка».

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019

ЗМІСТ

ВСТУП.....	7
ЛЕКЦІЯ 1.	9
РОЗДІЛ 1 НЕЛІНІЙНІ СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ	9
Тема 1.1 Нелінійні САК та їх особливості.....	9
1.1.1 Основні визначення та властивості.....	9
1.1.2 Типові статичні нелінійності САК.....	11
1.1.3 Динамічні нелінійності.	14
ЛЕКЦІЯ 2.	17
Тема 1.2 Точні методи дослідження нелінійних САК.....	17
1.2.1 Поняття про фазовий простір	17
1.2.2 Фазові траєкторії на площині	18
ЛЕКЦІЯ 3.	26
Тема 1.3 Фазові траєкторії та портрети нелінійних САК.....	26
1.3.1 Особливі точки та особливі лінії.....	27
1.3.2 Метод ізоклін.	30
ЛЕКЦІЯ 4	33
Тема 1.4 Дослідження динаміки релейних САК методом фазової площини.....	33
1.4.1 Релейна система стабілізації зі стійким положенням рівноваги.....	33
1.4.2 Релейна система стабілізації зі стійким граничним циклом.	38
ЛЕКЦІЯ 5	42
Тема 1.5 Дослідження стійкості нелінійних систем методом	
Ляпунова (другий або прямий метод Ляпунова).....	42
1.5.1 Основні визначення.....	42
1.5.2 Теорема Ляпунова про стійкість.	45
ЛЕКЦІЯ 6.	48
1.5.3 Теорема Ляпунова про нестійкість	48
1.5.4 Метод Ляпунова-Лур'є.....	49
ЛЕКЦІЯ 7	53
Тема 1.6 Частотний критерій абсолютної стійкості нелінійних	
систем В.-М. Пóпова	53
1.6.1 Поняття абсолютної стійкості нелінійних систем.....	53
1.6.2 Критерій Пóпова для систем зі стійкою лінійною частиною.....	55
1.6.3 Критерій Пóпова для систем з нестійкою лінійною частиною.....	55

ЛЕКЦІЯ 8.	60
Тема 1.7 Метод гармонічної лінеаризації	60
1.7.1 Сутність методу гармонічної лінеаризації.	60
ЛЕКЦІЯ 9.	65
1.7.2 Обчислення коефіцієнтів гармонічної лінеаризації.	65
1.7.2.1 Релейна характеристика.	65
1.7.2.2 Релейна характеристика із зоною нечутливості.	66
1.7.2.3 Нелінійність типу насичення.	68
1.7.2.4 Релейна характеристика з гістерезисом.	69
ЛЕКЦІЯ 10	72
Тема 1.8 Алгебричний та частотний методи дослідження автоколивань	72
1.8.1 Алгебричний метод дослідження автоколивань – метод Попова.....	72
1.8.1.1 Визначення параметрів періодичного розв’язку	72
1.8.1.2 Стійкість періодичного розв’язку	74
1.8.1.3 Приклади дослідження автоколивань методом Попова	77
ЛЕКЦІЯ 11	86
1.8.2 Частотний метод дослідження автоколивань – метод Гольдфарба.	86
1.8.2.1 Визначення параметрів автоколивань	86
1.8.2.2 Дослідження стійкості автоколивань.....	87
1.8.2.3 Приклади дослідження автоколивань методом Гольдфарба.....	88
ЛЕКЦІЯ 12	94
Тема 1.9 Нелінійні коригувальні ланки.....	94
1.9.1 Нелінійне змінювання коефіцієнта передачі системи	94
1.9.2 Псевдолінійні коригувальні пристрої.....	97
1.9.3 Нелінійні коригувальні пристрої з додатним гістерезисом.....	99
ЛЕКЦІЯ 13	102
Тема 1.10 Компенсування шкідливого впливу нелінійностей.....	102
1.10.1 Застосування компенсувальних нелінійностей	102
ЛЕКЦІЯ 14	109
1.10.2 Вібраційне компенсування нелінійностей	109
ЛЕКЦІЯ 15.	115
РОЗДІЛ 2 ДИСКРЕТНІ СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ.....	115
Тема 2.1 Дискретні САК та їх основні особливості.....	115
2.1.1 Визначення дискретної САК.	115
2.1.2 Типи квантування сигналів.....	116

2.1.3 Імпульсні системи та їх класифікація.....	118
2.1.4 Типи модуляції сигналів	118
2.1.5 Переваги імпульсних САК.....	120
ЛЕКЦІЯ 16.	122
Тема 2.2 Математичний апарат дослідження імпульсних САК	122
2.2.1 Поняття про решітчасту функцію.	122
2.2.2 Різниці решітчастих функцій.....	123
ЛЕКЦІЯ 17.	126
2.2.3 Лінійні різницеві рівняння та стійкість їх розв'язків.....	126
2.2.4 Дискретне перетворення Лапласа і z -перетворення	129
ЛЕКЦІЯ 18.	133
Тема 2.3 Передатні функції імпульсних САК	133
2.3.1 Структурна схема імпульсної САК. Поняття дискретної передатної функції та її отримання за таблицями z -перетворень.....	133
ЛЕКЦІЯ 19	137
2.3.2 Передатна функція фіксатора нульового порядку	137
2.3.3 Отримання дискретної передатної функції за формулою розкладання	140
ЛЕКЦІЯ 20.	142
Тема 2.4 Наближене визначення дискретної передатної функції та перетворення структур імпульсних САК.....	142
2.4.1 Визначення дискретної передатної функції за методом Боксера-Таллера.....	142
2.4.2 Визначення дискретної передатної функції за методом Тастіна	144
2.4.3 Основні правила перетворень структур імпульсних систем.....	144
ЛЕКЦІЯ 21.	148
Тема 2.5 Математичний опис імпульсних систем у просторі стану	148
2.5.1 Поняття про стан та простір стану імпульсної системи	148
2.5.2 Отримання дискретних рівнянь стану.	149
2.5.3 Керованість та спостережуваність імпульсних систем.....	152
ЛЕКЦІЯ 22.	154
Тема 2.6 Частотні характеристики імпульсних САК.....	154
2.6.1 Отримання частотних характеристик імпульсних систем.	154
2.6.2 Спектри сигналів в імпульсних системах.	156

2.6.3 Теорема Котельнікова-Шеннона та визначення періоду квантування в імпульсних САК	158
ЛЕКЦІЯ 23.	161
Тема 2.7 Стійкість імпульсних САК.....	161
2.7.1 Кореневий спосіб визначення стійкості дискретних систем.	161
2.7.2 Критерій стійкості Гурвіца для імпульсних систем	162
ЛЕКЦІЯ 24.	165
Тема 2.8 Псевдочастотні логарифмічні характеристики імпульсних САК.....	165
2.8.1 Поняття про псевдочастотне перетворення	165
2.8.2 Побудова логарифмічних псевдочастотних характеристик елементарних ланок.....	166
2.8.3 Критерій Найквіста в логарифмічній формі для імпульсних систем	168
ЛЕКЦІЯ 25.	172
Тема 2.9 Якість імпульсних САК.....	172
2.9.1 Точність імпульсних систем в ustalених режимах.....	172
2.9.2 Якість імпульсних систем в перехідних процесах.	175
ЛЕКЦІЯ 26.	179
Тема 2.10 Цифрові САК.....	179
2.10.1 Загальні принципи побудови цифрових САК.....	179
2.10.2 Квантування, кодування та екстраполяція сигналів у цифрових САК	180
ЛЕКЦІЯ 27.	185
Тема 2.11 Синтез цифрових САК	185
2.11.1 Передатні функції та логарифмічні характеристики типових дискретних коригувальних ланок	185
2.11.2 Синтез цифрових регуляторів методом логарифмічних псевдочастотних характеристик.....	189
Додаток А Коефіцієнти гармонічної лінеаризації типових нелінійностей	195
Додаток Б Перетворення Лапласа та z-перетворення.....	196
Список літератури	197

ВСТУП

Теорія автоматичного керування є підґрунтям для розв'язання основних задач автоматизації промислових установок, комплексів та технологічних процесів. Поряд з лінійними неперервними системами автоматичного керування (САК) важливе значення мають також нелінійні та дискретні системи. Це пояснюється тим, що всім реальним об'єктам, зокрема електромеханічним, властиві суттєві природні нелінійності. А потужний розвиток мікропроцесорної техніки створює можливості для широкого застосування в САК цифрових керувальних пристроїв.

Навчальна дисципліна "Нелінійні та дискретні системи автоматичного керування" належить до базових дисциплін у професійній підготовці бакалаврів за освітньою програмою «Електромеханічні системи автоматизації, електропривод та електромобільність». Вона надає необхідні знання для оволодіння дисциплінами «Керування електроприводами», «Основи мехатроніки» для першого (бакалаврського) рівня, а також «Системи оптимального та інтелектуального керування» та «Робастне керування» для другого (магістерського) рівня.

Метою дисципліни є підготовка студентів у сфері проектування, дослідження, налагодження та експлуатації сучасних автоматичних систем керування електромеханічними об'єктами. Результатом вивчення дисципліни є набуття студентами ґрунтовних знань і умінь щодо аналізу, синтезу і дослідження нелінійних та дискретних САК.

Курс лекцій являє собою перероблене та розширене видання конспекту лекцій¹. У відповідності з навчальною програмою дисципліни він містить 27 лекцій та складається з двох розділів. У першому розділі, що включає чотирнадцять лекцій, розглядаються нелінійні системи керування. Другий розділ,

¹ Нелінійні та дискретні системи автоматичного керування. Ч 1 : конспект лекцій / Уклад. В. Ф. Кудін, Б. І. Приймак. – Київ : НТУУ «КПІ», 2013. – 141 с. – Режим доступу: <http://ela.kpi.ua/handle/123456789/2704>.

який охоплює тринадцять лекцій, присвячений вивченню дискретних САК. У кінці кожної лекції наведена рекомендована література, завдання для самостійної роботи та питання для самоконтролю студентів. Для зручності розв'язання практичних задач у Додатку А представлені коефіцієнти гармонічної лінеаризації типових нелінійностей, а в Додатку Б – таблиця перетворень Лапласа та z-перетворень.

РОЗДІЛ 1 НЕЛІНІЙНІ СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

Тема 1.1 Нелінійні САК та їх особливості

1.1.1 Основні визначення та властивості

Нелінійними САК називаються системи, математичне описання яких не задовольняє умови лінійності. Ці умови полягають у тому, що при зміні зовнішньої дії на ланку або систему в a разів характер перехідного процесу не змінюється, а змінюється лише масштаб вихідної величини в a разів (принцип пропорційності). Крім того, реакція ланки або системи на декілька одночасно прикладених дій дорівнює сумі реакцій на кожну з цих дій, прикладених окремо (принцип суперпозиції).

Якщо САК містить хоча б одну нелінійну ланку, яка описується нелінійним диференціальним рівнянням або має нелінійну статичну характеристику то у цілому вона є нелінійною.

Нелінійні динамічні ланки описуються нелінійними диференціальними рівняннями. *Ознакою нелінійних диференціальних рівнянь* є залежність коефіцієнтів цих рівнянь від координат системи або їх похідних, а також наявність у цих рівняннях взаємного множення або ділення деяких координат чи їх похідних.

Усі реальні системи автоматичного керування електроприводами нелінійні. Це пояснюється тим, що основним елементом електропривода є електрична машина, яка містить кола з феромагнітними матеріалами. Рівняння, що описують динамічні процеси в електричній машині, нелінійні, бо індуктивність є функцією струму, е.р.с. внаслідок насичення магнітної системи нелінійно залежить від струму збудження тощо. Крім того, в електроприводах використовуються підсилювачі з насиченням, елементи механічних передач з

люфтами і сухим тертям та інші нелінійні елементи.

Теорію лінійних САК можна застосовувати для аналізу і синтезу реальних систем електропривода лише при досить малих відхиленнях від режиму, що досліджується. В цьому разі реальна нелінійна система лінеаризується методами, викладеними у попередньому семестрі. Проте існує велика кількість САК, у яких нелінійні ланки застосовуються спеціально з метою забезпечення таких властивостей систем, що принципово не можуть бути досягнуті в лінійних системах. До таких ланок належать релейні елементи і логічні перемикаючі пристрої, які дозволяють змінити структуру САК залежно від деяких її координат, ланки із зоною нечутливості, підсилювачі з насиченням, що забезпечують обмеження координат, тощо.

Задачі аналізу і синтезу для нелінійних САК набагато складніші за аналогічні задачі для лінійних систем. Це пояснюється великою різноманітністю та складністю динамічних процесів у нелінійних системах. Стійкість нелінійних систем на відміну від лінійних залежить від величини і місця прикладання зовнішньої дії, характер перехідного процесу змінюється при зміні величини зовнішньої дії, в нелінійних системах спостерігаються режими, які неможливі в лінійних системах, зокрема режим автоколивань тощо. Усе це потребує застосування спеціальних точних і наближених методів аналізу і синтезу нелінійних систем. Основні з цих методів, найбільш вживані для аналізу і синтезу автоматизованого електропривода, розглядатимуться нами нижче.

Нелінійні ланки САК дуже різноманітні. Нелінійні характеристики деяких з них при обмеженому діапазоні зміни вхідного сигналу мало відрізняються від лінійних. Такі нелінійності називають слабкими або *несуттєвими*. Після лінеаризації цих нелінійностей САК зводять до лінійних і для їх дослідження використовують методи теорії лінійних систем. Іншу групу становлять нелінійні елементи, характеристики яких не можна замінити лінійними. Вони надають САК якісно нових властивостей і, як правило, описуються розривними або близькими до них функціями. Такі нелінійності називають

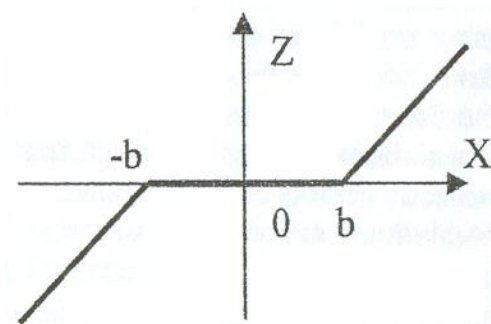
суттєвими.

Характеристики суттєво нелінійних елементів часто ідеалізують, тобто реальну нелінійну характеристику замінюють кількома лінійними ділянками, кожна з яких описується своїм рівнянням. У точках переходу від однієї ділянки до іншої спостерігається розрив похідної, тобто похідна має різні значення при підході до точки розриву зліва і справа. Якщо ідеалізувати суттєво нелінійні характеристики, то їх можна звести до обмеженої кількості типових. Розглянемо найбільш поширені з них. При цьому вважатимемо, що нелінійності безінерційні, тобто не створюють суттєвого запізнення. Такі нелінійності описуються звичайними функціональними залежностями між вхідною і вихідною змінними, які називаються статичними характеристиками безінерційних нелінійних ланок.

1.1.2 Типові статичні нелінійності САК

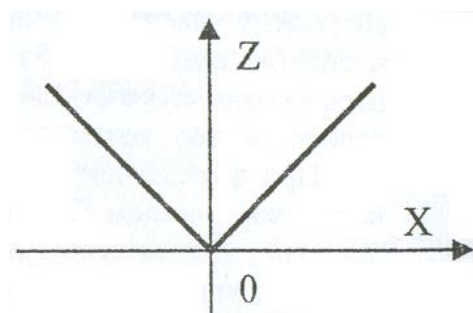
Розрізняють статичні та динамічні нелінійності. Статичні нелінійності – це нелінійності статичних характеристик. Вони можуть бути однозначними та неоднозначними. Графічні зображення та аналітичне описання однозначних нелінійностей наведено на рис. 1.1, а неоднозначних нелінійностей – на рис. 1.2. На рис. 1.1 представлено нелінійність типу зона нечутливості (рис. 1.1,а), нелінійність визначення модуля деякої величини $z = |x|$ (рис. 1.1,б), нелінійність типу насичення або обмеження (рис. 1.1,в), а також нелінійності типу двопозиційне (рис. 1.1,г) та трипозиційне (рис. 1.1,д) ідеальні реле.

На рис. 1.2 показано нелінійність типу двопозиційне реле з гістерезисом (рис. 1.2,а), трипозиційне реле з гістерезисом (рис. 1.2,б) та нелінійність типу люфт або мертвий хід (рис. 1.2,в).



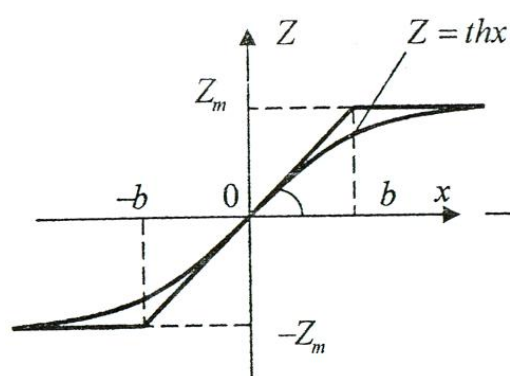
$$Z = \begin{cases} 0, & \text{при } |x| \leq b, \\ K(x-b), & \text{при } x > b, \\ K(x+b), & \text{при } x < -b. \end{cases}$$

а



$$Z = |x|$$

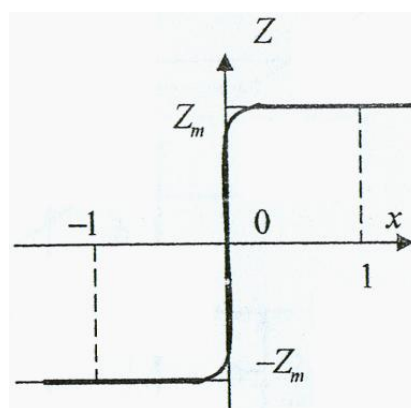
б



$$Z = \begin{cases} Z_m, & \text{при } x > b, \\ Kx, & \text{при } |x| < b, \\ -Z_m, & \text{при } x < -b. \end{cases}$$

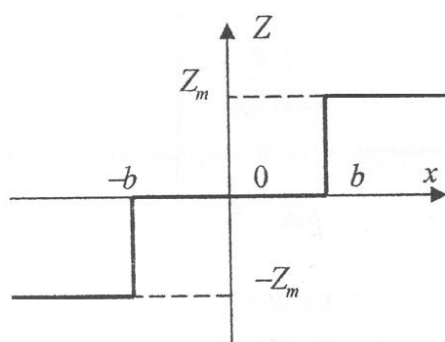
$K = Z_m/b.$

в



$$Z = Z_m \operatorname{sign} x \quad \text{або} \quad Z = \begin{cases} Z_m, & \text{при } x > 0, \\ 0, & \text{при } x = 0, \\ -Z_m, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

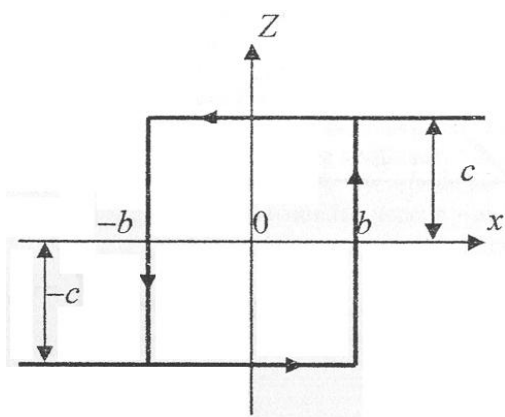
г



$$Z = \begin{cases} Z_m, & \text{при } x > b, \\ 0, & \text{при } |x| \leq b, \\ -Z_m, & \text{при } x < -b. \end{cases}$$

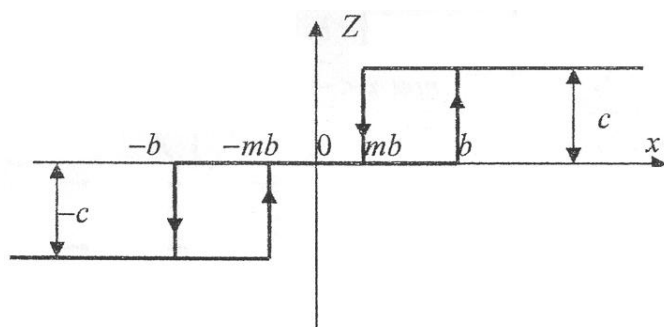
д

Рис. 1.1. Типові однозначні нелінійності: а – зона нечутливості; б – модуль; в – насичення; г – двопозиційне реле; д – трипозиційне реле



$$Z = \begin{cases} +C, \text{ нпу } x > b, & \dot{x} > 0, \\ -C, \text{ нпу } x \leq b, & \dot{x} > 0, \\ +C, \text{ нпу } x \geq -b, & \dot{x} < 0, \\ -C, \text{ нпу } x < -b, & \dot{x} < 0. \end{cases}$$

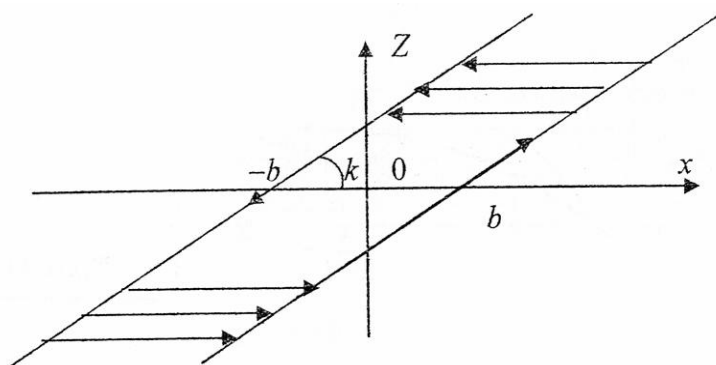
а



$$Z = \begin{cases} -C, \text{ нпу } x \leq -mb, & \dot{x} > 0, \\ 0, \text{ нпу } -mb < x \leq b, & \dot{x} > 0, \\ +C, \text{ нпу } x > b, & \dot{x} > 0, \\ +C, \text{ нпу } x \geq mb, & \dot{x} < 0, \\ 0, \text{ нпу } -b \leq x < mb, & \dot{x} < 0, \\ -C, \text{ нпу } x < -b, & \dot{x} < 0, \\ 0, \text{ нпу } -mb < x < mb. \end{cases}$$

$$0 \leq m \leq 1$$

б



$$в) Z = \begin{cases} const, \text{ нпу } |Kx - Z| < b \\ K(x - b), \dot{x} > 0, \\ K(x + b), \dot{x} < 0. \end{cases}$$

в

Рис. 1.2. Типові неоднозначні нелінійності: а – двопозиційне реле з гістерезисом; б – трипозиційне реле з гістерезисом; в – люфт

1.1.3 Динамічні нелінійності

За визначенням, *динамічними* являються такі нелінійності, що описуються нелінійним диференціальним рівнянням. Розглянемо характерні приклади динамічних нелінійностей.

1. Ланки, у яких стала часу змінюється в залежності від вхідної величини (рис. 1.3).

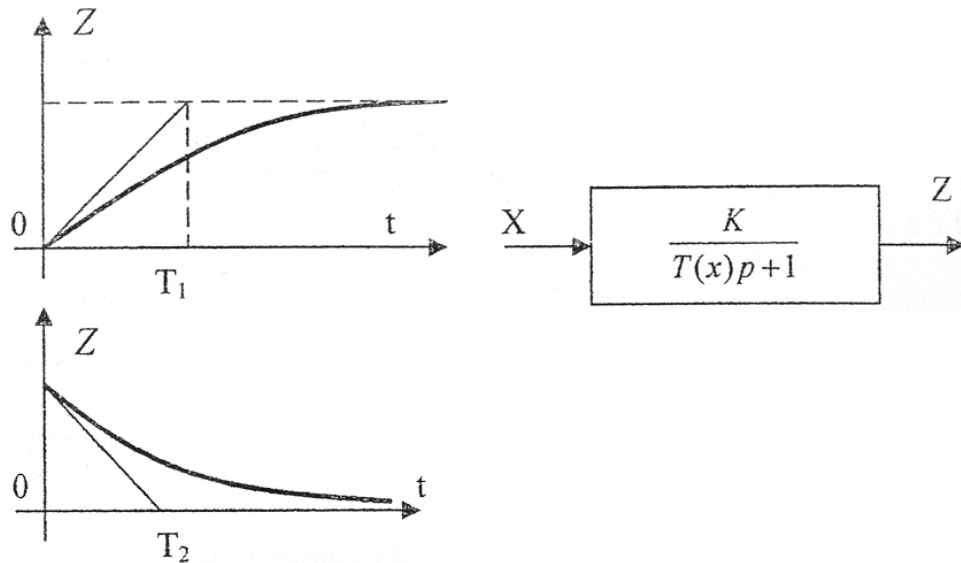


Рис. 1.3. Нелінійна динамічна ланка та її часові характеристики

$$[T(x)p + 1]z = kx \quad (1.1)$$

або

$$[T_1 p + 1]z = kx \quad \text{при } px > 0,$$

$$[T_2 p + 1]z = kx \quad \text{при } px < 0$$

2. Привод, що описується диференціальним рівнянням

$$(m_2 p^2 + m_1 p)z = f(x), \quad (1.2)$$

де $f(x)$ – характеристика типу насичення; m_1, m_2 – постійні параметри.

Важливо зазначити, що нелінійності у системах керування та регулювання можуть бути природно властиві реальній системі (тертя, люфт в механічних передачах, насичення операційних підсилювачів та силових перетворювачів) та зазвичай шкідливими (рис. 1.4). В цьому разі їх вплив прагнуть

зменшити. Проте можуть бути і нелінійності, що спеціально вводяться в коригувальні пристрої для поліпшення динамічних характеристик системи (рис. 1.5).

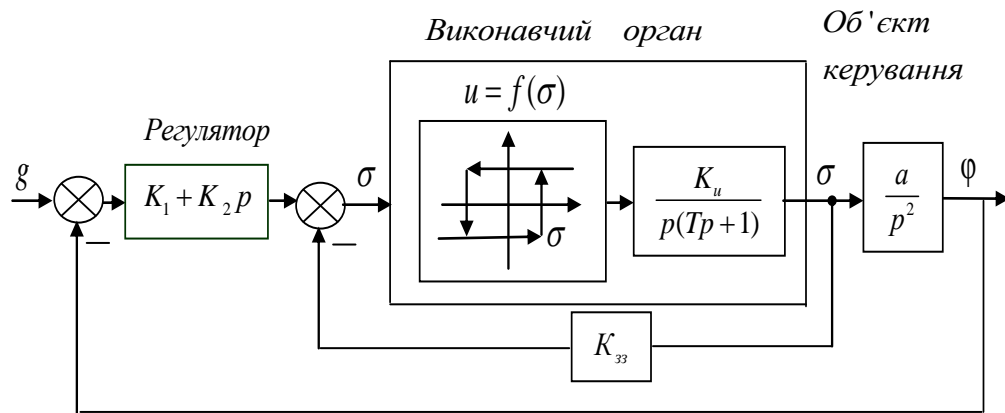


Рис. 1.4. Структурна схема САК з нелінійним виконавчим органом

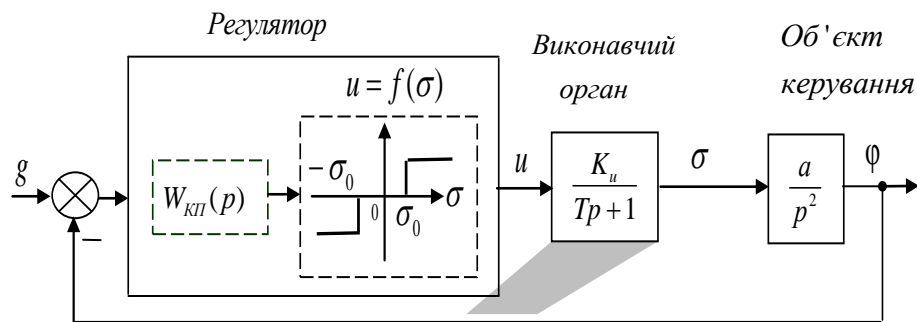


Рис. 1.5. Структурна схема САК з нелінійним регулятором

Література: [1, с. 390-396], [4, с. 7-13].

СРС: Аналітичне описання нелінійної статичної характеристики із зоною насичення та гістерезисом.

Література: [1, с. 395-396].

Контрольні запитання:

1. Які нелінійності називаються суттєвими?
2. У чому полягають принципові відмінності між лінійними та нелінійними САК?

3. Покажіть графічно та назвіть типові статичні однозначні нелінійності.
4. Зобразіть графічно та наведіть назви типових статичних неоднозначних нелінійностей.
5. Дайте визначення та наведіть приклади динамічних нелінійностей.
6. Наведіть приклади природних нелінійностей, що характерні для електромеханічних об'єктів.

Тема 1.2 Точні методи дослідження нелінійних САК

До точних методів дослідження нелінійних САК відносяться такі методи дослідження динамічних процесів як метод фазового простору (фазової площини), метод ізоклін, метод точкового перетворення Андронова. Також сюди відносяться способи дослідження стійкості нелінійних систем, якими є 2-й метод Ляпунова та частотний критерій абсолютної стійкості В.-М. Пóпова.

1.2.1 Поняття про фазовий простір

У загальному випадку нелінійні диференціальні рівняння динаміки в нормальній формі мають вигляд

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.3)$$

де x_i – координати або змінні стану системи

$$x_1(0) = x_{10}, x_2(0) = x_{20}, \dots, x_n(0) = x_{n0} \quad \text{при } t = 0. \quad (1.4)$$

Для дослідження нелінійних систем широко використовується *метод фазового простору*, який полягає в наступному.

Уявимо n -вимірний простір координат стану системи (x_1, x_2, \dots, x_n) , який називається фазовим простором (рис. 1.6). Тоді початковий стан системи визначають початкові умови процесу і він зображується точкою $M_0(t=0)$, а процес у часі, тобто розв'язок рівняння

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] \quad (1.5)$$

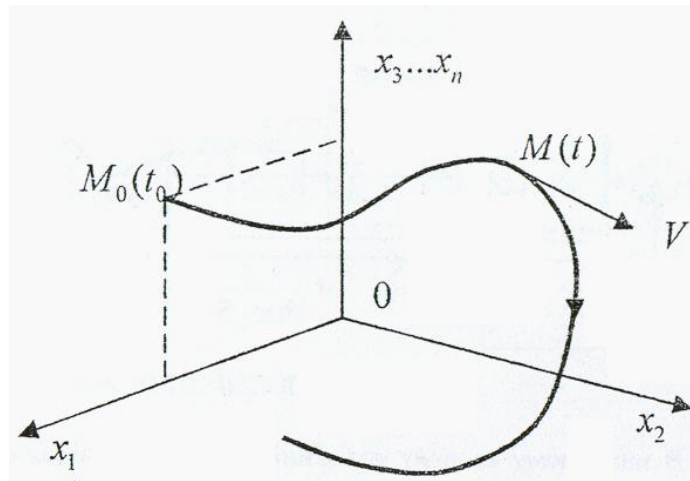


Рис. 1.6. Фазовий простір вимірності n та фазова траєкторія системи

отримає зображення у вигляді деякої кривої, яка називається *фазовою траєкторією* системи. Поточна точка M , що відповідає стану системи у довільний момент часу t , називається *зображувальною точкою*. Зауважимо, що значення $\frac{dx_i}{dt}$ визначають у кожен момент часу проєкції вектора швидкості \mathbf{v} зображувальної точки M на осі x_i .

Отже *фазовий простір* являє собою геометричний образ динамічних процесів, що протікають у системі.

Відмітимо на завершення, що для стійкої системи фазові траєкторії асимптотично наближатимуться до початку координат при $t \rightarrow \infty$. Для системи 2-го порядку ($n = 2$) можна реально зображати фазові траєкторії на фазовій площині.

1.2.2 Фазові траєкторії на площині

Дослідимо спочатку поведінку лінійної САК 2-го порядку на фазовій площині. Нехай маємо лінійне рівняння

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_2 x = 0. \quad (1.6)$$

Позначимо $y = \frac{dx}{dt}$. Тоді

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -a_1 y - a_2 x. \end{cases} \quad (1.7)$$

Виключаючи час шляхом ділення 2-го рівняння на 1-ше у системі (1.7), отримаємо сімейство інтегральних кривих на фазовій площині

$$\frac{dy}{dx} = -a_1 - a_2 \frac{x}{y}. \quad (1.8)$$

Розв'язок рівняння (1.8) $y = \varphi(x)$ з однією довільною сталою інтегрування визначає деяке сімейство так званих інтегральних кривих, де кожна крива відповідає одному значенню сталої.

Розглянемо окремі випадки. Серед коренів характеристичного рівняння, що визначаються як

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}, \quad (1.9)$$

можливі шість випадків.

1. Корені чисто уявні $a_1 = 0, a_2 > 0$.
2. Корені комплексні з від'ємною дійсною частиною $(a_1 > 0, a_2 > 0, a_1^2 < 4a_2)$.
3. Корені комплексні з додатною дійсною частиною $(a_1 < 0, a_2 > 0, a_1^2 < 4a_2)$.
4. Корені дійсні від'ємні $(a_1 > 0, a_2 > 0, a_1^2 > 4a_2)$.
5. Корені дійсні додатні $(a_1 < 0, a_2 > 0, a_1^2 > 4a_2)$.
6. Корені дійсні і мають різні знаки $(a_2 < 0, a_1 = 0)$.

Випадок 1. Корені чисто уявні : $a_1 = 0, a_2 > 0$.

У цьому разі отримаємо незатухаючі коливання, оскільки $\lambda_{1,2} = \pm j\omega$

$$\left. \begin{aligned} x &= A \sin(\omega t + \beta) \\ y &= \omega A \cos(\omega t + \beta) \end{aligned} \right\}, \quad (1.10)$$

де $\omega = \sqrt{a_2}$. Вираз (1.10) – це параметричне рівняння еліпсу з півосями A та ωA . Для початкових умов x_0 та y_0 маємо

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{y_0^2}{\omega^2}}, \quad \beta = \arctg \frac{\omega x_0}{y_0}, \quad (1.11)$$

оскільки

$$x_0 = A \sin \beta \quad \text{та} \quad y_0 = A \omega \cos \beta.$$

Виключаючи t , отримаємо $\frac{dy}{dx} = -\omega^2 \frac{x}{y}$ або $2y dy = -\omega^2 2x dx$ після розділення змінних. Звідси

$$y^2 = -\omega^2 (x^2 - A^2) \quad \text{та} \quad \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{(\omega A)^2} = 1. \quad (1.12).$$

Маємо рівняння еліпсу (1.12). Отже незатухаючим коливанням на фазовій площині відповідають траєкторії у вигляді еліпсів по яких зображувальна точка рухається навколо початку координат (рис. 1.7).

Випадок 2. Корені комплексні з від'ємною дійсною частиною ($a_1 > 0, a_2 > 0, a_1^2 < 4a_2$).

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta \quad (1.13)$$

$$\begin{cases} x = A e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \beta) \\ y = \gamma A e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \beta + \delta) \end{cases}, \quad (1.14)$$

$$\text{де } \alpha = \frac{a_1}{2}, \quad \beta = \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}, \quad \gamma = \sqrt{a_2}, \quad \delta = \arctg \frac{\alpha}{\beta}.$$

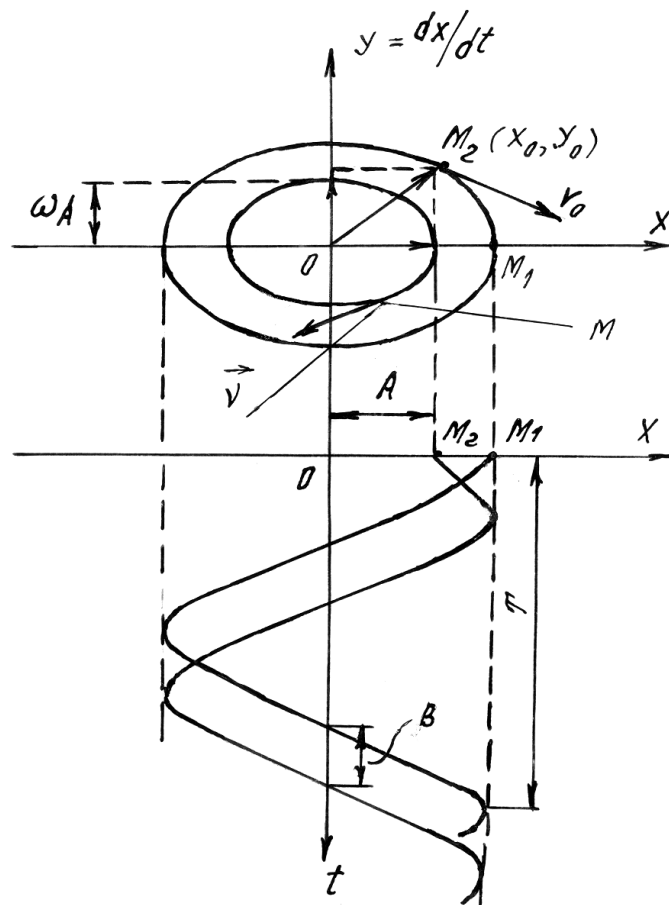


Рис. 1.7. Незатухаючі коливання та відповідні їм фазові траєкторії

Рівняння (1.14) є параметричними рівняннями спіралей, що асимптотично наближаються до початку координат. По цих спіралях рухається зображувальна точка, що відповідає затухаючому коливальному процесу (рис. 2.8).

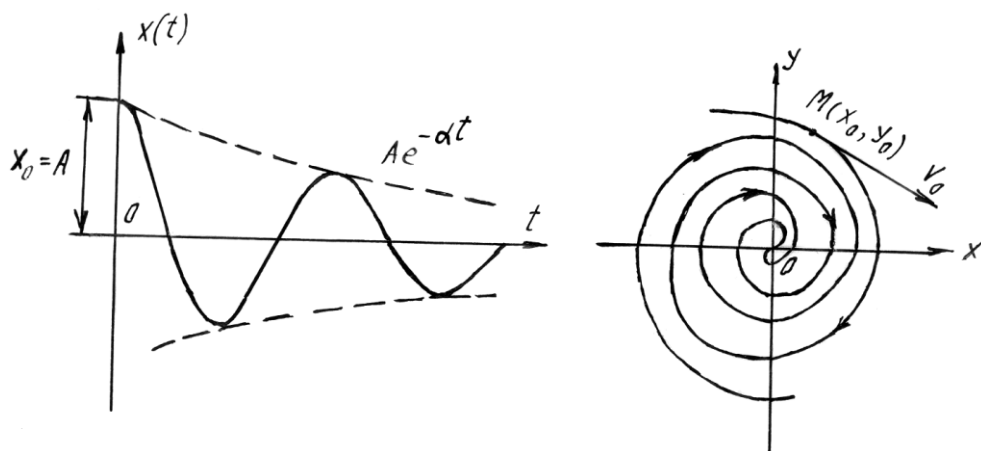


Рис. 2.8. Затухаючий коливальний процес та його фазові траєкторії

Випадок 3. Корені комплексні з додатною дійсною частиною ($a_1 < 0, a_2 > 0, a_1^2 < 4a_2$).

$$p_{1,2} = +\alpha \pm j\beta \quad (1.15)$$

$$x(t) = Ae^{+\alpha t} \sin(\omega t + \beta). \quad (1.16)$$

Розбіжним коливанням системи на фазовій площині відповідають фазові траєкторії у вигляді спіралей, по яких зображувальна точка віддаляється від початку координат (рис. 1.9).

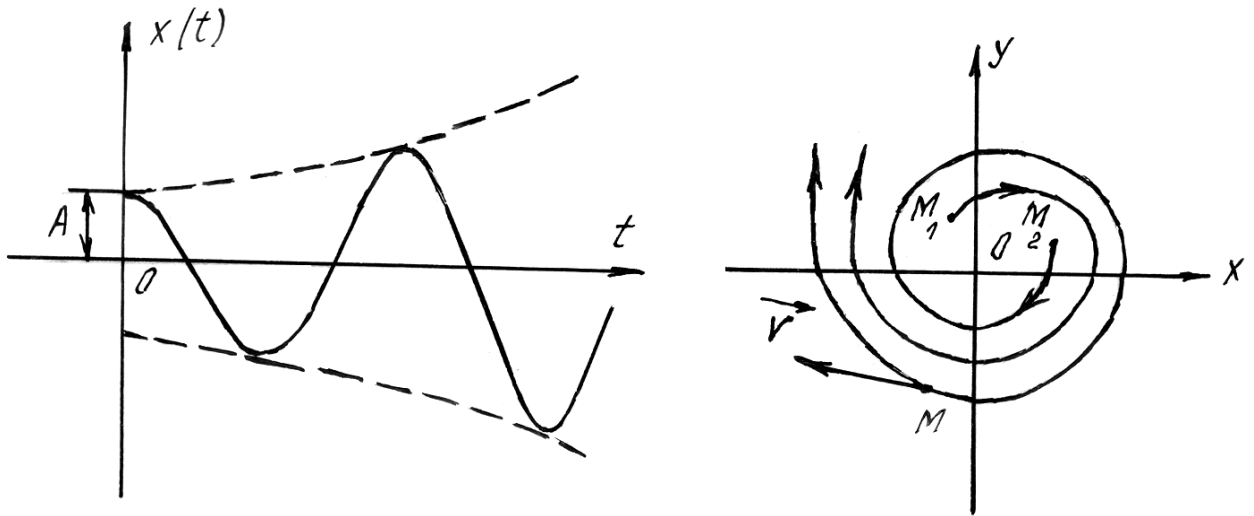


Рис. 1.9. Незатухаючий коливальний процес та його фазові траєкторії

Випадок 4. Корені дійсні від'ємні ($a_1 > 0, a_2 > 0, a_1^2 > 4a_2$).

$$x = C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t}; \quad (1.17)$$

$$y = -\alpha_1 C_1 e^{-\alpha_1 t} - \alpha_2 C_2 e^{-\alpha_2 t}, \quad (1.18)$$

$$\text{де } \alpha_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}.$$

Маємо затухаючий аперіодичний процес.

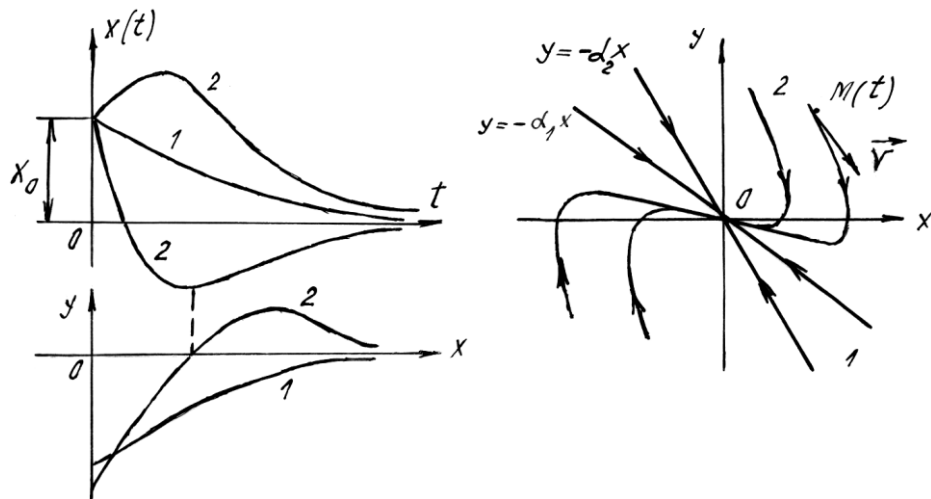


Рис. 1.10. Затухаючі аперіодичні процеси та їх фазові траєкторії

Затухаючим аперіодичним процесам відповідають фазові траєкторії, які вливаються у початок координат (рис. 1.10).

Випадок 5. Корені дійсні додатні ($a_1 < 0, a_2 > 0, a_1^2 > 4a_2$).

$$x = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}, \quad (1.19)$$

де $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$.

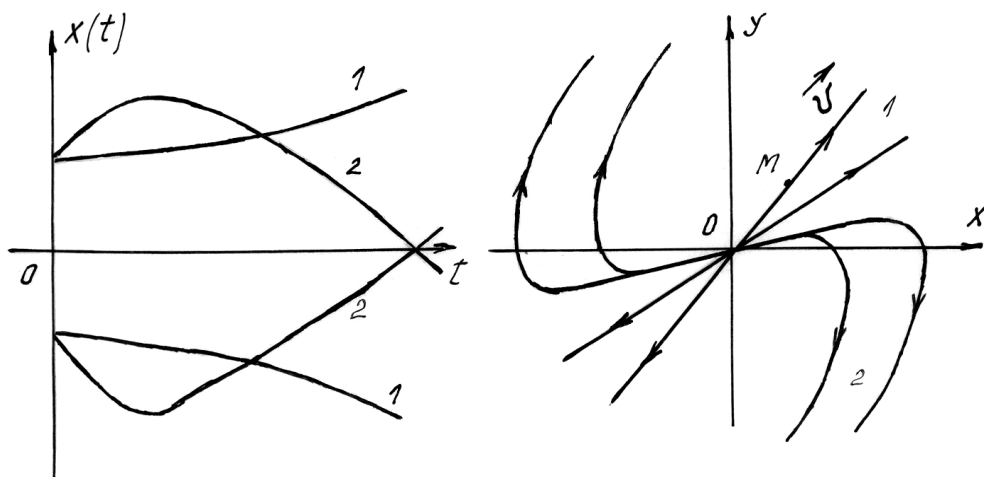


Рис. 1.11. Розбіжні аперіодичні процеси та їх фазові траєкторії

Для цього випадку отримаємо розбіжний аперіодичний перехідний процес, траєкторії якого виходять з початку координат у нескінченність (рис. 1.11).

Випадок 6. Корені дійсні різних знаків ($a_2 < 0, a_1 = 0$).

Ввівши позначення $a_2 = \alpha^2$, отримаємо

$$\frac{dy}{dt} - \alpha^2 x = 0, \quad \frac{dx}{dt} = y. \quad (1.20)$$

Звідси маємо рівняння фазових траєкторій

$$\frac{dy}{dx} = \alpha^2 \frac{x}{y}. \quad (1.21)$$

Після інтегрування отримаємо сімейство гіпербол (рис. 1.12).

$$\frac{x^2}{C^2} - \frac{y^2}{(\alpha C)^2} = 1. \quad (1.22)$$

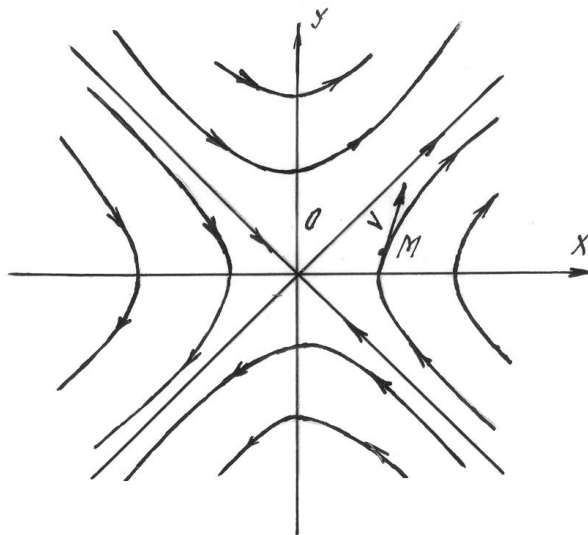


Рис. 1.12. Фазові траєкторії для випадку дійсних коренів різних знаків

Література: [1, с. 403-407], [4, с. 13-18].

СРС: Класифікація нелінійних законів автоматичного регулювання.

Література: [1, с. 467].

Контрольні запитання:

1. Назвіть точні методи дослідження нелінійних САК.

2. Поясніть сутність методу фазового простору.
3. Що таке зображувальна точка та фазова траєкторія?
4. Які величини відкладаються по осях координат фазової площини?
5. Для лінійної ланки 2-го порядку зобразіть фазові траєкторії, що відповідають усім варіантам коренів характеристичного рівняння ланки.

Тема 1.3 Фазові траєкторії та портрети нелінійних САК

Сукупність фазових траєкторій, що відповідають різним початковим станам системи, називається *фазовим портретом*. Фазовий портрет дає повне уявлення про динаміку системи.

Розглянемо докладніше особливості фазової площини та фазових траєкторій. Динаміка нелінійної системи 2-го порядку описується диференціальним рівнянням

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}),$$

де $f(x, y)$ – нелінійна функція. Як було показано вище, з цього рівняння нескладно отримати диференціальне рівняння фазових траєкторій

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{y}, \quad (1.23)$$

де $y = dx/dt$. Розв'язок (1.21) $y(x)$ дає рівняння фазової траєкторії.

На рис. 1.13 демонструється зв'язок між перехідним процесом $x(t)$ та фазовою траєкторією $y(x)$ для затухаючого коливального процесу.

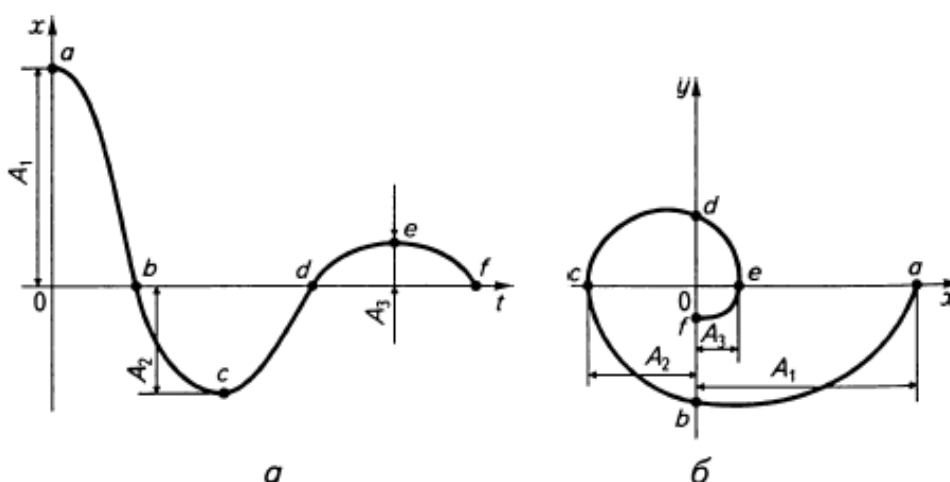


Рис. 1.13. Зв'язок між перехідним процесом (а) та фазовою траєкторією (б)

Однаковими літерами a, b, \dots, f позначено точки на графіку перехідного процесу (рис. 1.13,а) та фазовій траєкторії (рис. 1.13,б), що відповідають однаковим станам системи. На фазовій траєкторії напрямок руху зображувальної точки при збільшенні часу показано стрілкою.

Фазові траєкторії мають наступні властивості. 1) У верхній півплощині фазової площини $y = dx/dt > 0$, тому зображувальна точка рухається у бік зростання x (зліва направо), а в нижній півплощині, де $y = dx/dt < 0$ – у бік зменшення x (справа наліво). 2) У точці перетину фазової траєкторії з віссю x буде $y = 0$, тому, згідно з (1.21) $dy/dx = \infty$. Звідси випливає, що дотична до фазової траєкторії у точці її перетину з віссю абсцис перпендикулярна до цієї осі.

1.3.1 Особливі точки та особливі лінії

Рівняння (1.21) однозначно описує дотичну до фазової траєкторії в усіх точках крім тих, для яких водночас виконуються умови

$$y = \dot{x} = 0, \quad f(x, y) = \dot{y} = 0.$$

У цих точках $dy/dx = 0/0$, тобто не існує певного напрямку дотичної до фазової траєкторії, а значить, з них може виходити багато фазових траєкторій. Крім цього, ці точки є точками рівноваги системи, оскільки в них похідні фазових координат дорівнюють нулю.

Означення: на фазових портретах *особливими точками* називаються точки, які відповідають усталеному стану системи і де напрями дотичних до фазових траєкторій не визначені.

Особливі точки для розглянутих вище фазових портретів лінійної ланки 2-го порядку мають наступні назви: для випадку 1 – *центр*, 2 – *стійкий фокус*, 3 – *нестійкий фокус*, 4 – *стійкий вузол*, 5 – *нестійкий вузол*, 6 – *сідло*.

Для нелінійних систем вводиться поняття особливих ліній. На рис. 1.14,а зображено особливу лінію – *стійкий граничний цикл*

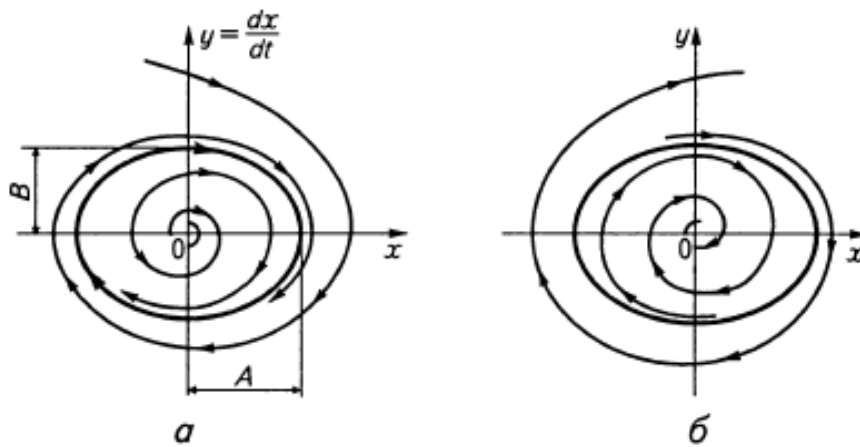


Рис. 1.14. Особливі лінії – стійкий (а) та нестійкий (б) граничні цикли

(автоколивання системи). Тут "у малому" процес розбігається, а "у великому" – збігається до особливої лінії.

Означення 1. Геометричне місце точок (початкових умов), що відокремлює область, де система стійка "у великому" від області, де система нестійка "у малому", називається *стійким граничним циклом*.

Другу особливу лінію – *нестійкий граничний цикл*, показано на рис. 1.14,б. Тут спостерігається нестійкість системи "у великому" та стійкість "у малому".

Означення 2. Границя початкових умов, що відокремлює область, де система стійка, являється *нестійким граничним циклом*.

Третій варіант фазового портрету із особливою лінією показано на рис. 1.15. Цей фазовий портрет відповідає випадку, коли при малих відхиленнях

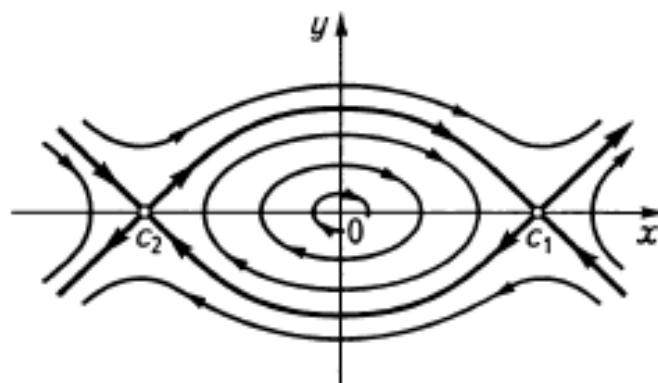


Рис. 1.15. Фазовий портрет з особливою лінією – сепаратрисою

нелінійна система веде себе як лінійна, що перебуває на межі стійкості (характеристичне рівняння має чисто уявні корені). Проте при великих відхиленнях стійкість системи порушується і перехідні процеси, а також фазові траєкторії, стають зовсім іншими. Тут перехідні процеси стають аперіодичними розбіжними. На фазовій площині крім особливої точки O типу центра, з'являються два сідла $C1$ та $C2$.

Означення 3. Особлива лінія, що проходить через особливі точки типу сідла і розділяє фазову площину на зони, де існують якісно різні перехідні процеси, називається *сепаратрисою*.

У показаному на рис. 1.15 фазовому портреті сепаратриса розділяє зовнішню зону, де нелінійна система нестійка "у великому" і внутрішню зону, де нелінійна система стійка "у малому", але стійкість системи є не асимптотичною.

У нелінійних системах із зоною нечутливості або з сухим тертям з'являється зона застою, а на фазовій площині замість особливої точки — *особливий відрізок*. Фазовий портрет, що відповідає нелінійній системі з особливим відрізком зображено на рис. 1.16. У таких системах стійкість "в малому" або "в цілому" буде не асимптотичною.

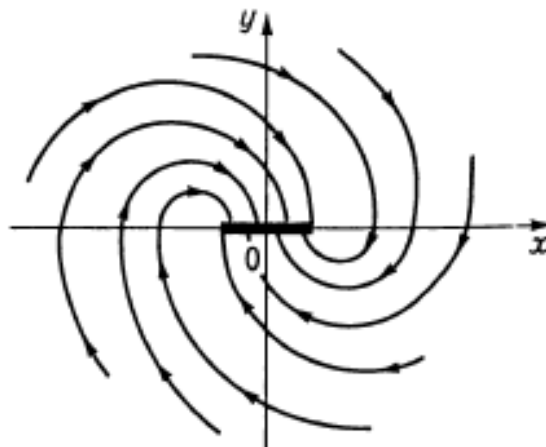


Рис. 1.16. Особливий відрізок на фазовому портреті

Вище розглядалися такі приклади нелінійних систем 2-го порядку, для яких фазові траєкторії відшукувалися шляхом інтегрування по ділянках. У тих випадках, коли інтегрування викликає труднощі, хід фазової траєкторії можна якісно визначити за допомогою методу ізоклін (без інтегрування рівнянь).

Ізокліною називається така лінія, у всіх точках перетину якої з фазовими траєкторіями останні нахилені під одним і тим же певним кутом до осі абсцис.

Так, якщо $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, то для отримання ізокліни необхідно, щоб $x = k_1 C T_1 \ln|y + k_1 C| - T_1 y + C_1 \frac{dx}{dt} y$, $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} = C$, тобто рівняння ізокліни має вигляд $f(x, y) = C$ (4.17), де C – тангенс кута нахилу фазових траєкторій до осі абсцис.

Наприклад, для нелінійного рівняння типу Ван-дер-Поля

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - k(1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x = 0, \quad (1.24)$$

або

$$\left(\frac{dx}{dt} \right) = y, \quad \frac{dy}{dt} = k(1 - x^2)y - x \quad (1.25)$$

диференціальне рівняння фазових траєкторій має вигляд

$$\frac{dy}{dx} = k(1 - x^2) - \frac{x}{y}. \quad (1.26)$$

Звідси отримуємо рівняння ізоклін

$$k(1 - x^2) - \frac{x}{y} = C. \quad (1.27)$$

Задаючи різні значення C , для кожного з них будуємо криву на фазовій площині – ізокліну. Потім на кожній кривій наносимо стрілочки під кутами $\alpha = \arctg C$ до осі абсцис. Із цих стрілочок і складаються шукані фазові

траєкторії. Наприклад, при $k = 0,2$ фазовий портрет має вигляд, як показано на рис. 1.17.

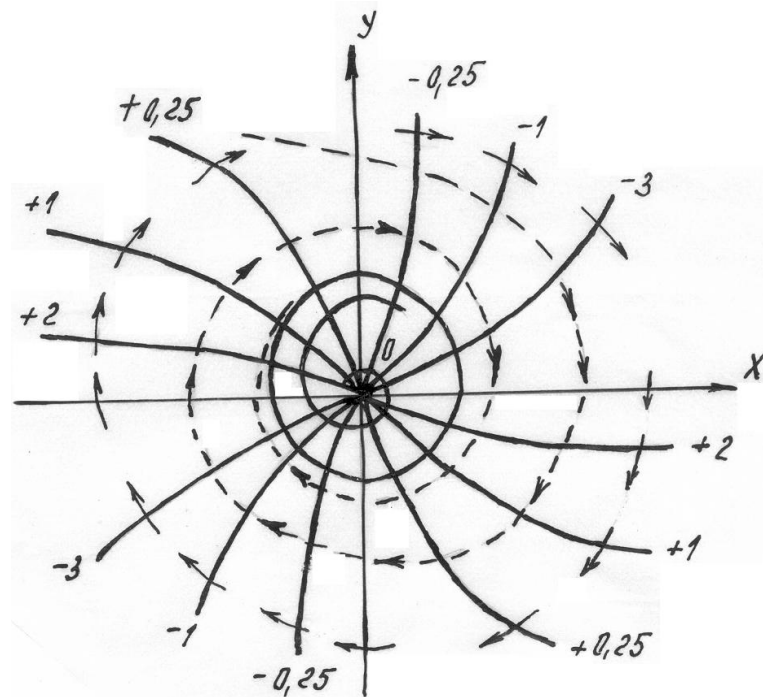


Рис. 1.17. Фазовий портрет з ізоклінами

В даному разі існує стійкий граничний цикл, що відповідає режиму автоколивань.

Треба зазначити, що методу ізоклін властива низька точність і він може застосовуватися для систем 2-го порядку.

Література: [1, с. 408-413], [2, с. 179-182].

СРС: Метод точкового перетворення

Література: [1, с. 426-428].

Контрольні запитання:

1. Що таке фазовий портрет системи?
2. Які точки на фазових портретах САК називаються особливими?
3. Наведіть перелік усіх особливих точок на фазових портретах лінійної

ланки 2-го порядку.

4. Які особливі лінії властиві фазовим портретам нелінійних САК?
5. Дайте визначення стійкого граничного циклу.
6. Що таке нестійкий граничний цикл?
7. Охарактеризуйте стійкість нелінійної системи, на фазовому портреті якої є сепаратриса.
8. У чому полягає метод ізоклін?
9. Що таке ізокліна?
10. Чи потрібно для застосування методу ізоклін знати рівняння фазових траєкторій?
11. Для дослідження систем якого порядку є придатним метод ізоклін?

Тема 1.4 Дослідження динаміки релейних САК методом фазової площини

На прикладах визначимо основні особливості перехідних процесів в нелінійних системах.

1.4.1 Релейна система стабілізації зі стійким положенням рівноваги

Структурна схема досліджуваної релейної системи представлена на рис. 1.18.

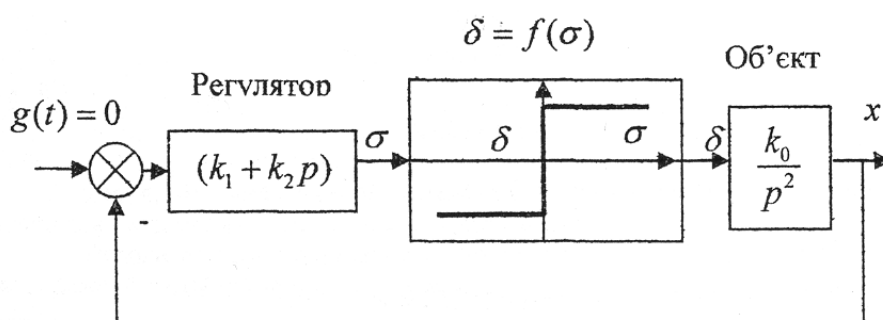


Рис. 1.18. Структурна схема релейної системи стабілізації

Диференціальне рівняння замкнутої САК має вигляд

$$p^2 x = k_0 \delta, \quad \delta = f(\sigma) = C \operatorname{sign} \sigma, \quad \sigma = -(k_1 + k_2 p) x \quad (1.28)$$

або в нормальній формі

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -k_0 C \operatorname{sign}(k_1 + k_2 p) x.$$

Виключаючи час, приходимо до диференціального рівняння фазових траєкторій

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{k_0 C}{y} \operatorname{sign}(k_1 x + k_2 y). \quad (1.29)$$

Отримане рівняння є суттєво нелінійним. Застосовується наступний спосіб його розв'язання. Задану нелінійну функцію можна описати наступним чином

$$f(\sigma) = C \cdot \operatorname{sign} \sigma = \begin{cases} C & \text{при } \sigma > 0, \\ 0 & \text{при } \sigma = k_1 x + k_2 y = 0, \\ -C & \text{при } \sigma < 0. \end{cases} \quad (1.30)$$

Аналізуючи (1.30), бачимо, що фазова площина (x, y) ділиться на дві області: I) $f(\sigma) = C$; II) $f(\sigma) = -C$. Ці дві області, розділені прямою

$$\sigma = k_1 x + k_2 y = 0, \quad (1.31)$$

яка називається *лінією перемикання*. Области на фазовій площині називають *листами*, а саму площину – *багатолистою*. На кожному листі (I, II) фазові траєкторії мають певний вигляд, причому "зшивання" листів відбувається на лінії перемикання. Дійсно, для області (I) $f(\sigma) = C$ рівняння фазових траєкторій, що розташовані праворуч від лінії перемикання, матиме вигляд:

$$y dy = -k_0 C dx, \quad \text{звідки} \quad y^2 = -2k_0 C x + C_1. \quad (1.32)$$

Для області (II) $f(\sigma) = -C$, рівняння фазових траєкторій, що розташовані ліворуч від лінії перемикання, мають вигляд

$$y dy = k_0 C dx, \quad \text{звідки} \quad y^2 = 2k_0 C x + C_2. \quad (1.33)$$

Отже, як впливає з рівнянь (1.32), (1.33), фазові траєкторії – це параболи. Положення вершини параболи визначається довільною константою C_1 або C_2 , тобто початковими умовами перехідного процесу x_0, y_0 . Ці параболи представлені на рис. 1.19,а. Відзначимо дві параболи, до яких лінія перемикання буде дотичною в точках А та В. Ці параболи подані на рис. 1.19,а пунктирними лініями. На внутрішній ділянці АВ між точками дотику фазові траєкторії будуть підходити до ліній перемикання з двох боків і зображувальна точка вже не зможе піти з неї.

Фазові траєкторії підходять справа та зліва до відрізка АВ, де вони зливаються. Розглянемо цей процес. Нехай фазова траєкторія іде по кривій 1 до лінії ОА. Потім точка переходить на криву 2, далі на криву 3 і т.д., як це показано на рис. 1.19,б. Таким чином зображувальна точка, здійснюючи вібрацію, рухатиметься по лінії перемикання до початку координат. При цьому частота перемикань прямуватиме до нескінченності, а амплітуда прямуватиме до нуля. Такий процес називається *ковзним*.

Із рівняння лінії перемикання (1.31) нескладно отримати рівняння руху зображувальної точки у ковзному режимі

$$\frac{dx}{dt} = y; \quad y = -k_3 x; \quad \frac{dx}{dt} + k_3 x = 0; \quad x = x_0 e^{-k_3 t}, \quad (1.34)$$

де $k_3 = k_1/k_2$, x_0 – початкова умова, яка відповідає моменту попадання зображувальної точки на лінію перемикання (ковзного режиму).

Важливо наступне: нелінійна система 2-го порядку на ділянці ковзного режиму *вироджується в лінійну систему* 1-го порядку.

Таким чином, досліджувана релейна система стійка за будь-яких початкових умов та будь-яких параметрів системи.

Маючи траєкторію руху зображувальної точки на фазовій площині, як було сказано вище, можна побудувати перехідний процес у часовій області. На рис. 1.20 побудовано перехідний процес для регульованої змінної $x(t)$ за шести положеннями зображувальної точки M_0 на фазовій площині, зображений на рис. 1.19,а. При цьому в момент часу $t = t_6$ у системі починається ковзний режим.

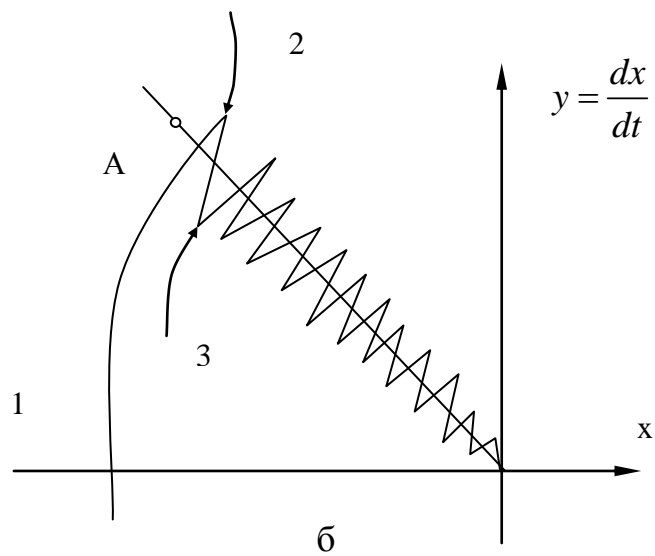
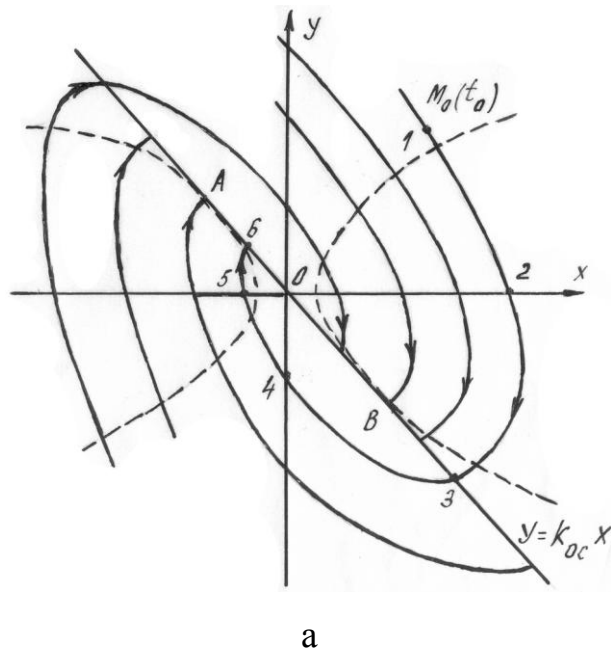


Рис. 1.19. Фазові траєкторії та ковзний режим системи з двопозиційним реле

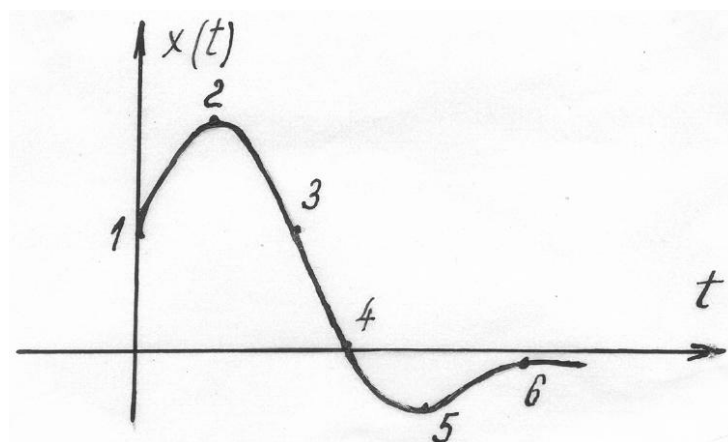


Рис. 1.20. Перехідний процес виходу об'єкта $x(t)$, побудований за фазовою траєкторією

Розглянемо аналогічну систему стабілізації, де $F(\delta)$ має зону нечутливості, як це показано на рис. 1.21.

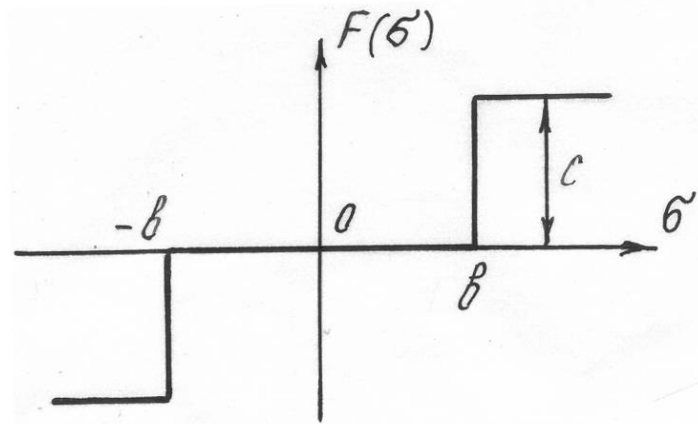


Рис. 1.21. Характеристика трипозиційного реле

$$p^2 x = k_0 \delta, \quad \delta = F(\sigma), \quad \sigma = -(k_1 + k_2 p)x. \quad (1.35)$$

У цьому разі на фазовій площині існуватимуть дві похилі прямі, оскільки є два випадки:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = k_0 \delta, \\ \delta = F(\sigma) = 0 \end{cases} \quad \text{при } |\sigma| < b; \quad (1.36)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = k_0 \delta, \\ \delta = F(\sigma) = \text{sign } \sigma \end{cases} \quad \text{при } |\sigma| > b. \quad (1.37).$$

У першому випадку при $|\sigma| < b$ $\frac{dx}{dt} = y$, $\frac{dy}{dt} = 0$, $y = C$, тобто отримуємо прямі, паралельні до осі x у смугі АВ. У другому випадку при $|\sigma| > b$ отримуємо рівняння парабол. Система стійка, має коливальний перехідний процес, але замість особливої точки О має особливий відрізок ($y = 0, -\frac{b}{k_1} < x < \frac{b}{k_1}$), тобто вихід регулятора може знаходитися в будь-якому місці зони нечутливості релейної характеристики виконавчого органу. Перехідний процес для певних початкових умов x_0, y_0 представлений на рис. 1.22.

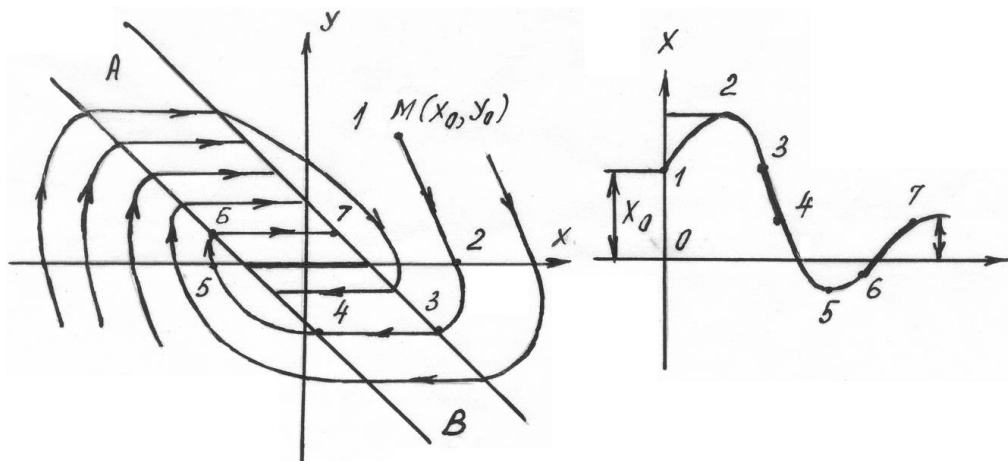


Рис. 1.22. Фазові траєкторії та перехідний процес САК з трипозиційним реле

1.4.2 Релейна система стабілізації зі стійким граничним циклом

Структурна схема досліджуваної релейної системи, що являє собою САК рухом водної торпеди, представлена на рис. 1.23.

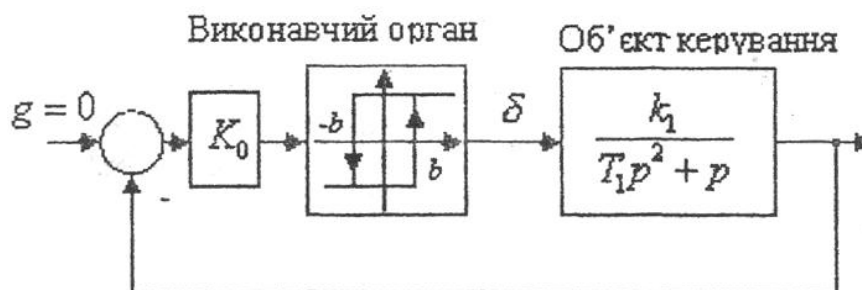


Рис. 1.23. Структурна схема досліджуваної релейної САК

Система диференціальних рівнянь в операторній формі, що описує досліджувану релейну систему, має вигляд

$$\begin{aligned} (T_1 p^2 + p)\psi &= -k_1 \delta; \quad \delta = F(\sigma); \quad \sigma = k_2 \psi, \\ \begin{cases} \delta = C \operatorname{sign}(\sigma - b) & \text{при } \dot{\sigma} > 0 \\ \delta = C \operatorname{sign}(\sigma + b) & \text{при } \dot{\sigma} < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.38),$$

де ψ – кут відхилення; $\dot{\psi}$ – кутова швидкість; $k_2 = K_0$. Введемо позначення $\frac{dx}{dt} = y$, тоді

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{T_1}(y + k_1\delta) \\ \delta = C \operatorname{sign}\left(x - \frac{b}{k_2}\right) \quad \text{при } y > 0, \\ \delta = C \operatorname{sign}\left(x + \frac{b}{k_2}\right) \quad \text{при } y < 0 \end{cases} \quad (1.39).$$

Якщо $y > 0$, то перемикання відбувається при $\psi = \frac{b}{k_2}$ (лінія EF), якщо $y < 0$, то при $\psi = -\frac{b}{k_2}$ (лінія GH), що зображено на рис. 1.24.

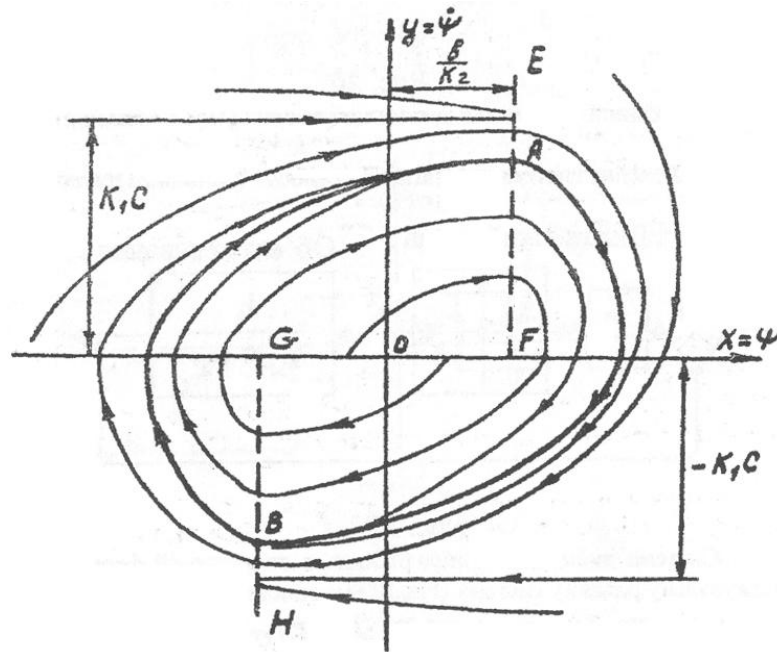


Рис. 1.24. Фазові траєкторії релейної САК зі стійкими автоколиваннями

Тоді праворуч від лінії перемикання $EFGH$ для першого випадку буде справедливим рівняння

$$T_1 \frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{d\psi}{dt} = -k_1 C,$$

а ліворуч від лінії перемикання $EFGH$ для другого випадку – рівняння

$$T_1 \frac{d^2 \psi}{dt^2} + \frac{d\psi}{dt} = k_1 C.$$

Для першого випадку рівняння фазових траєкторій має вигляд

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T_1} - \frac{k_1 C}{T_1 y},$$

звідки, інтегруючи, маємо

$$x = -k_1 C T_1 \ln|y - k_1 C| - T_1 y + C_1, \quad (1.40)$$

де C_1 – довільна стала, $y = -k_1 C$ – рівняння асимптоти. За (1.40) будуються криві, що розташовані справа від лінії $EFGH$.

Для другого випадку, відповідно отримаємо

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T_1} + \frac{k_1 C}{T_1 y},$$

звідки, інтегруючи, маємо

$$x = k_1 C T_1 \ln|y + k_1 C| - T_1 y + C_2. \quad (1.41)$$

За рівнянням (1.41) будуються усі фазові траєкторії ліворуч від лінії $EFGH$. На рис. 1.24 за отриманими рівняннями побудовано фазовий портрет системи. З нього бачимо, що всі фазові траєкторії, які йдуть від початку координат, – розбігаються, а ті, що йдуть з нескінченності, – збігаються. Тобто тут існує стійкий граничний цикл. Отже усталений рух водяної торпеди буде автоколивальним. Амплітуду автоколивань можна визначити безпосередньо з рис. 1.24.

Література: [1, с. 410-415].

СРС: Коригування релейних систем утворенням ковзних режимів.

Література: [1, с. 474-480].

Контрольні запитання:

1. Чим відмінні частини фазової площини, розділені лінією перемика-

ня?

2. У чому суть ковзного режиму в релейних системах?
3. За яких умов виникає ковзний режим?
4. Якими є амплітуда та частота коливань керованої величини у ковзному режимі?
5. Чим особлива динаміка нелінійної САК у ковзному режимі роботи?
6. Як побудувати фазовий портрет нелінійної системи 2-го порядку?
7. Що таке автоколивання?
8. Як за фазовим портретом нелінійної САК визначити показники якості перехідних процесів?

Тема 1.5 Дослідження стійкості нелінійних систем методом Ляпунова (другий або прямий метод Ляпунова)

Ляпунов О.М. (Олександр Михайлович, 1857-1918 (Ярославль-Одеса), робота в Харкові 1885-1902), видатний російський вчений, учень математика П.Л. Чебишева, у 1892 р. в своїй докторській дисертації під назвою "Загальна задача про стійкість руху" розробив два методи дослідження стійкості нелінійних динамічних систем.

Перший метод придатний тільки для дослідження стійкості "в малому" нелінійних систем, що лінеаризуються. Ляпунов вперше довів допустимість дослідження стійкості нелінійних систем за поведінкою її лінеаризованої моделі "в малому", за винятком критичних випадків.

Другий метод Ляпунова являється найбільш загальним методом дослідження стійкості будь-яких нелінійних систем.

1.5.1 Основні визначення

Нехай САК описується системою нелінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= F_1(x_1, x_2, \dots, x_n); \\ \frac{dx_2}{dt} &= F_2(x_1, x_2, \dots, x_n); \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= F_n(x_1, x_2, \dots, x_n),\end{aligned}\tag{1.42}$$

де функції F_1, F_2, \dots, F_n містять нелінійні функції будь якого виду, але завжди задовольняють співвідношення

$$F_1 = F_2 = \dots F_n = 0 \quad npu \quad x_1 = x_2 = \dots x_n = 0, \quad (1.43)$$

оскільки в усталеному режимі усі відхилення змінних будуть рівними нулю. Введемо наступні поняття для дослідження стійкості.

Функція Ляпунова та її похідні. Будь яку функцію вигляду $V(\bar{x})$, де $\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, що перетворюється в нуль при $x_1 = x_2 = \dots, x_n = 0$, називатимемо *функцією Ляпунова*, якщо її змінними $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in$ фазові координати системи (1.42).

Функція Ляпунова $V(\bar{x})$ у n -вимірному фазовому просторі описуватиме деяку поверхню. Її властивості наступні:

1. На початку координат фазового простору $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$.
2. Ця функція неперервна зі всіма своїми частинними похідними 1-го порядку.
3. Функція $V(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$, за винятком точки $x_1 = x_2 = \dots, x_n = 0$, тобто $V(\bar{x})$ – додатно визначена функція.
4. Функція $V(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \infty$ при $\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \rightarrow \infty$, тобто при віддаленні точки у фазовому просторі від початку координат, що визначається Евклідовою нормою.

Функція називається *знаковизначеною додатною* у деякій області, що містить початок координат, якщо вона додатна та зберігає свій знак у всій області фазового простору, а перетворюється в нуль лише на початку координат. Наприклад, $V(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_2^2$ (рис. 1.25,а).

Функція $V(\bar{x})$ називається *знакопостійною додатною*, якщо вона додатна та зберігає свій знак у всій області фазового простору і може перетворюватися в нуль не лише на початку координат а й в інших точках фазового простору. Наприклад, $V(x_1, x_2) = x_2^2$ (рис. 1.25,б).

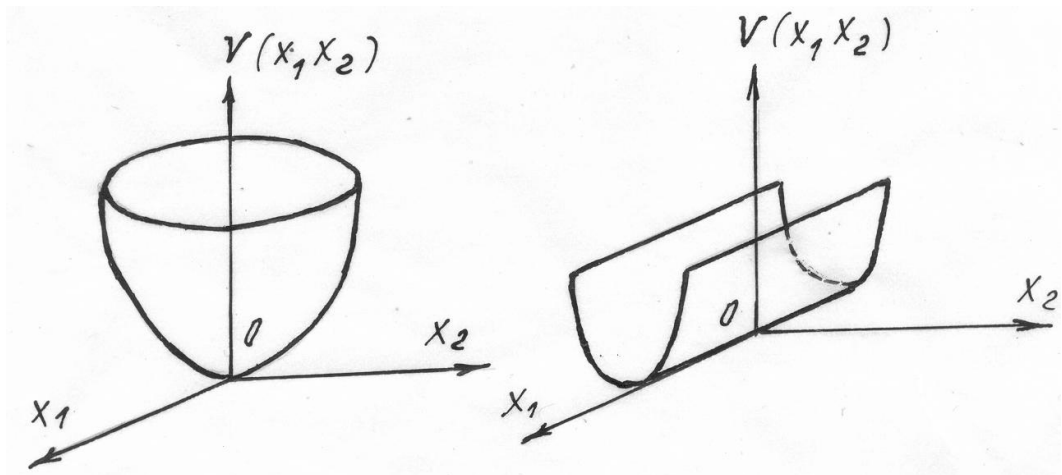


Рис. 1.25. Приклади знаковизначеної та знакопостійної функцій

Похідна від функції Ляпунова за часом має вигляд

$$\frac{dV(x)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}. \quad (1.44)$$

Або, після підстановки рівнянь системи (1.42), отримаємо

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} F_1(\bar{x}) + \frac{\partial V}{\partial x_2} F_2(\bar{x}) + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} F_n(\bar{x}). \quad (1.45)$$

Тут $F_i(\bar{x})$, $i=1,2,\dots,n$ – праві частини вихідних диференціальних рівнянь не-лінійної системи. Отже,

$$\frac{dV}{dt} = W(x_1, x_2, \dots, x_n) - \quad (1.46)$$

це повна похідна за часом, яка є функцією від \bar{x} і може бути знаковизначеною додатною або від'ємною, а також знакопостійною додатною або від'ємною. Оскільки

$$\text{grad}V = \left\{ \frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right\}, \quad (1.47)$$

а вектор фазової швидкості $F(\bar{x}) = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ також має компоненти

$$F_1(\bar{x}) = \frac{dx_1}{dt}, \dots, F_n(\bar{x}) = \frac{dx_n}{dt},$$

то $\frac{dV}{dt} = W(\bar{x}) = \langle \text{grad} V(\bar{x}) \cdot F(\bar{x}) \rangle = \langle \nabla V(\bar{x}), F(\bar{x}) \rangle$, тобто скалярний добуток градієнта функції $V(\bar{x})$ на вектор фазової швидкості. Тепер дамо формулювання теорем Ляпунова.

1.5.2 Теорема Ляпунова про стійкість

Якщо при заданих у формі (1.42) диференціальних рівняннях можна підібрати таку знаковизначену функцію Ляпунова $V(x_1, \dots, x_n)$, щоб її похідна за часом $W(x_1, \dots, x_n)$ також була знаковизначеною (чи знакостійною), але мала знак протилежний знаку $V(\bar{x})$ то дана система буде стійкою. При знаковизначеній функції $W(\bar{x})$ матиме місце асимптотична стійкість.

Геометрична інтерпретація теореми. Візьмемо нелінійну систему 2-го порядку

$$\frac{dx_1}{dt} = F_1(x_1, x_2), \quad \frac{dx_2}{dt} = F_2(x_1, x_2). \quad (1.48)$$

Функція Ляпунова має вигляд

$$V(x_1, x_2) = a^2 x_1^2 + b^2 x_2^2 + 2cx_1 x_2.$$

Будемо надавати величині $V(x_1, x_2)$ наростаючі значення

$$V(\bar{x}) = 0, C_1, C_2, C_3, \dots, \quad (1.49)$$

тобто

$$\begin{aligned} 2cx_1 x_2 + a^2 x_1^2 + b^2 x_2^2 &= 0, \\ 2cx_1 x_2 + a^2 x_1^2 + b^2 x_2^2 &= C_1, \\ 2cx_1 x_2 + a^2 x_1^2 + b^2 x_2^2 &= C_2, \\ &\dots \end{aligned}$$

Ці вирази відповідають сімейству еліпсів на фазовій площині, як показано на рис. 1.26.

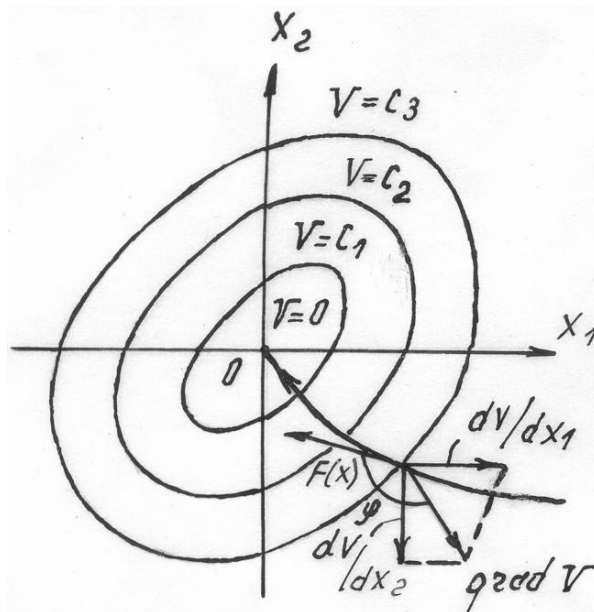


Рис. 1.26. Геометрична інтерпретація теореми Ляпунова про стійкість

Візьмемо тепер похідну від функції Ляпунова

$$\frac{dV}{dt} = 2(a^2 x_1 + c x_2) F_1(x_1, x_2) + 2(b^2 x_2 + c x_1) F_2(x_1, x_2) = W(x_1, x_2). \quad (1.50)$$

Якщо отримана таким чином функція $W(x_1, x_2)$ виявиться знаковизначеною від'ємною, тобто $\frac{dV}{dt} < 0$ у всіх точках фазової площини окрім початку координат, то зображувальна точка рухатиметься у сторону зменшення значення V . З плином часу фазова траєкторія буде перетинати еліпси ззовні, прямуючи до початку координат, і не зможе вийти за межі тих еліпсів, у котрі вона проникла. Це і означає стійкість даної системи, оскільки x_1 та $x_2 \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Література: [1, с. 416-419].

СРС: Задачі для самостійного розв'язання: Задача 1 [5, с. 22].

Література: [5, с. 20-23].

Контрольні запитання:

1. Що таке знаковизначена та знакопостійна функції?
2. Дайте означення функції Ляпунова.
3. Які властивості має функція Ляпунова?
4. Сформулюйте теорему Ляпунова про стійкість нелінійних систем.
5. Наведіть геометричну інтерпретацію теореми Ляпунова про стійкість нелінійних САК.

1.5.3 Теорема Ляпунова про нестійкість

Якщо при заданих диференціальних рівняннях системи (1.42) похідна $\frac{dV}{dt} = W(x_1, \dots, x_n)$ від якої-небудь функції Ляпунова виявиться знаковизначеною, причому сама функція $V(\bar{x})$ в області, що примикає до початку координат, матиме однаковий з похідною $W(\bar{x})$ знак, то дана система є нестійкою.

Геометричне трактування. Нехай для системи 2-го порядку знайдена знакозмінна функція $V(x_1, x_2)$, для якої похідна за часом

$$\frac{dV(x_1, x_2)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} F_1(x_1, x_2) + \frac{\partial V}{\partial x_2} F_2(x_1, x_2) = W(x_1, x_2) \quad (1.51)$$

є знаковизначеною додатною функцією. Фазова площина для функції Ляпунова такого типу зображена на рис. 1.27. Лінії AB та CD відповідають

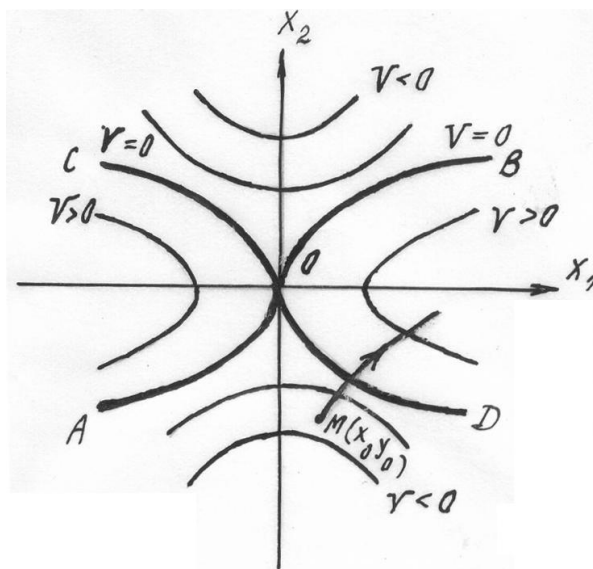


Рис. 1.27. Геометрична інтерпретація теореми Ляпунова про нестійкість

$V=0$ і розмежовують області, де $V<0$ та $V>0$. Зображувальна точка M , оскільки $W>0$, йтиме в сторону більших значень $V=C$ і буде необмежено віддалятися від початку координат. Це відповідає розбіжному процесу, тобто нестійкості системи.

Приклад 1.1 Задана система нелінійних рівнянь

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 + \alpha x_1^3, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \alpha x_2^3,\end{aligned}\tag{1.52}$$

де $\alpha = \text{const}$. За лінійним наближенням не можна робити висновок про стійкість, оскільки маємо уявні корені $\lambda^2 + 1 = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm j\omega$. Нехай

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2).\tag{1.53}$$

Тоді, в силу (1.52) і (1.53), маємо

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} = x_1(-x_2 + \alpha x_1^3) + \\ &+ x_2(x_1 + \alpha x_2^3) = \alpha(x_1^4 + x_2^4) = W(x_1, x_2).\end{aligned}\tag{1.54}$$

Дана функція $W(x_1, x_2)$ є знаковизначеною. Тут можливі випадки:

1. $\alpha < 0$, $V(x_1, x_2)$ – знаковизначена додатна, а $W(x_1, x_2)$ – знаковизначена від’ємна, отже система асимптотично стійка.
2. $\alpha > 0$, $V(x_1, x_2)$ – знаковизначена додатна, $W(x_1, x_2)$ – знаковизначена додатна, отже система асимптотично нестійка.
3. $\alpha = 0$, $V(x_1, x_2)$ – знаковизначена додатна, $W(x_1, x_2) = 0$, система стійка не асимптотично.

Важливо зазначити, що в загальному випадку методу пошуку конкретного виду функції Ляпунова не існує.

1.5.4 Метод Ляпунова-Лур’є

Для певного класу нелінійних систем стабілізації з одною однозначною нелінійністю така методика розвинута в роботах радянського фахівця в галузі механіки та автоматики Лур’є Анатолія Ісаковича.

Хай задана система диференціальних рівнянь, що описує динаміку замкненої нелінійної системи

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i\delta, \quad (i=1,2,\dots,n), \quad \delta = F(\sigma), \quad \sigma = -\sum_{i=1}^n k_i x_i - r\delta. \quad (1.55)$$

Тут x_1 – регульована координата, σ – керуючий сигнал, що поступає на вхід виконавчого органа, δ – вихід виконавчого органа, $F(\sigma)$ – однозначна не-лінійність, розташована в I та III квадрантах (рис. 1.28), k_i, r – коефіцієнти зворотних зв'язків.

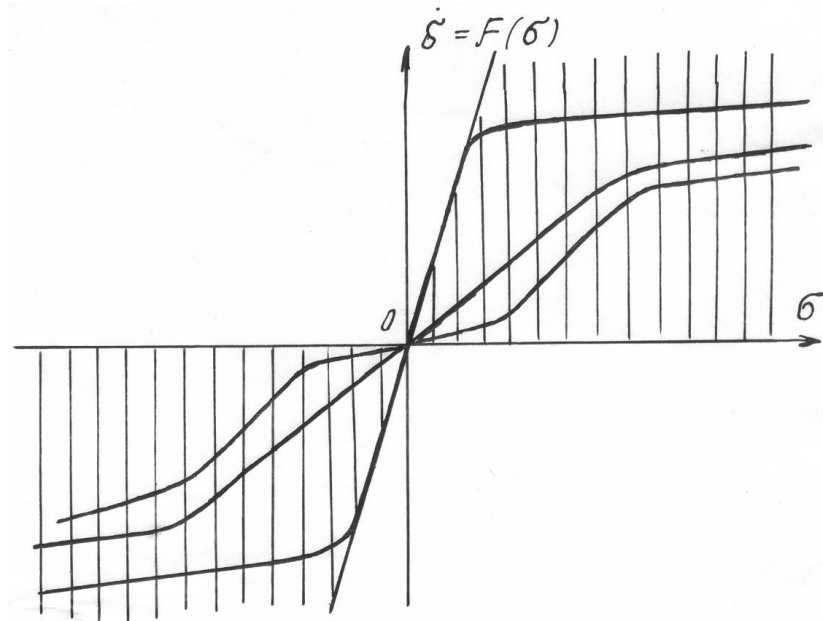


Рис. 1.28. Нелінійні залежності $\delta = F(\sigma)$

Функція Ляпунова для досліджуваної системи має вигляд

$$V(\bar{x}, \sigma) = \sum_{ij=1}^n p_{ij}x_i x_j + \int_0^{\sigma} F(\sigma) d\sigma, \quad (1.56)$$

де p_{ij} – параметри квадратичної форми, \bar{x} – вектор фазових координат.

Розглянемо простий приклад, що демонструє застосування метода Ляпунова-Лур'є для дослідження нелінійних систем.

Приклад 1.2 Треба дослідити стійкість нелінійної САК, структура якої показана на рис. 1.29.

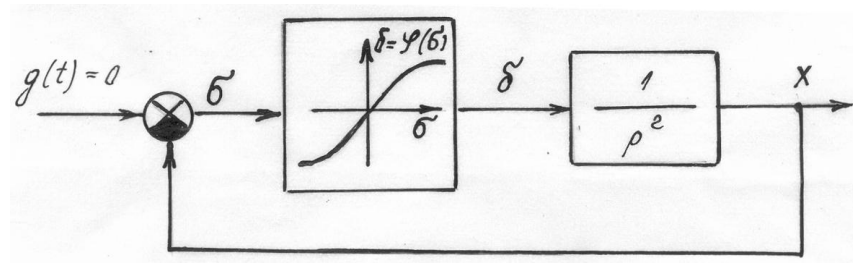


Рис. 1.29. Структурна схема нелінійної САК до прикладу

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = \delta \\ \delta = \varphi(\sigma) \\ \sigma = g(t) - x \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = \delta, \\ \delta = -\varphi(x) \end{cases} \quad (1.57)$$

Введемо заміну $\frac{dx}{dt} = y$. Перетворимо систему (1.57) у (1.58)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -\varphi(x) \end{cases} \quad (1.58)$$

Функцію Ляпунова виберемо у наступному вигляді

$$V(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + \int_0^x \varphi(x) dx. \quad (1.59)$$

Відшукаємо похідну від функції Ляпунова

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} y + \frac{\partial V}{\partial y} [-\varphi(x)]. \quad (1.60)$$

Підставляючи значення частинних похідних

$$\frac{dV}{dt} = \varphi(x) y + y [-\varphi(x)] = 0. \quad (1.61)$$

У відповідності з теоремою отримуємо неасимптотичну стійкість. Положенню рівноваги відповідає особлива точка типу "центр".

На завершення зазначимо, що прямий метод Ляпунова дає тільки *достатні умови* стійкості. Якщо для конкретної нелінійної системи вдалося

знайти функцію Ляпунова та з її допомогою визначити межі стійкості, то зовні цих меж не можна гарантувати, що система нестійка.

Література: [1, с. 416-419].

СРС: Задачі для самостійного розв'язання: Задача 3 [5, с. 22].

Література: [5, с. 20-23].

Контрольні запитання:

1. Сформулюйте теорему Ляпунова про нестійкість нелінійних систем.
2. Наведіть геометричну інтерпретацію теореми Ляпунова про нестійкість нелінійних САК.
3. У чому полягає метод Ляпунова-Лур'є?
4. Чи дає метод Ляпунова необхідні та достатні умови стійкості нелінійних САК?
5. Якою є основна складність при застосуванні методу Ляпунова для дослідження стійкості нелінійних систем?

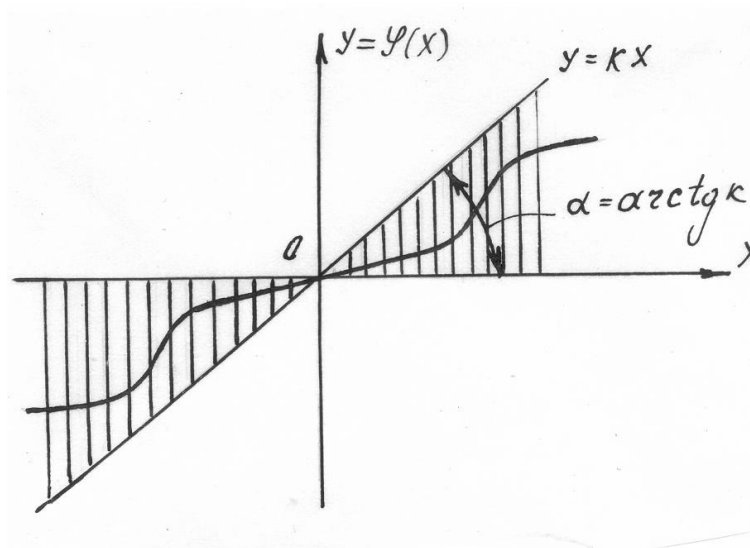
Тема 1.6 Частотний критерій абсолютної стійкості нелінійних систем

В.-М. Пóпова

1.6.1 Поняття абсолютної стійкості нелінійних систем

Абсолютна стійкість – це асимптотична стійкість нелінійної системи у цілому (тобто стійкість у всьому просторі станів системи) за умови, що задано не деяку конкретну нелінійність, а певний клас нелінійностей.

Наприклад, нелінійна характеристика $y = \varphi(x)$ задана у відміченому штрихуванням секторі $S(0, k)$, як це зображено на рис. 1.30. Подібне дослідження абсолютної стійкості має сенс з практичної точки зору, так як вигляд нелінійної характеристики часто буває невідомим чи може змінюватися.

Рис. 1.30. Сектор $S(0, k)$ для класу нелінійностей

Поняття абсолютної стійкості можна застосувати до класу стаціонарних нелінійностей, яким є множина $M(k_1, k_2)$ усіх кусково-безперервних функцій, графіки яких знаходяться у секторі $S(k_1, k_2)$ між лініями $y = k_1x$ та $y = k_2x$. Ці нелінійності мають задовольняти такі умови:

$y = \varphi(x)$ – безперервна функція;

$\varphi(0) = 0$; $x\varphi(x) > 0$ при $x \neq 0$;

$k_1x \leq \varphi(x) \leq k_2x$ при $x \neq 0$;

$$\int_0^{\pm\infty} \varphi(x) dx = \pm\infty.$$

Критерій абсолютної стійкості у 1958 р. запропонував відомий румунський учений В.-М. Попов (Vasile Mihai Pórov, 1928 р.н., закінчив факультет електроніки Бухарестського політехнічного інституту в 1950 р.). Цей критерій застосовується до систем із структурою, що зображена на рис. 1.31.

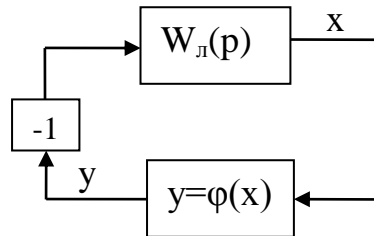


Рис. 1.31. Структура системи з розподілом лінійної та нелінійної частин

Нехай передатна функція лінійної частини системи

$$W_l(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}, \quad (1.62)$$

де характеристичне рівняння $Q(p) = 0$ має всі корені з від'ємними дійсними частинами. Нелінійна характеристика $y = \varphi(x)$ однозначна і лежить в секторі $S(0, k)$. Для визначення стійкості за цим критерієм використовується модифікована амплітудно-фазова частотна характеристика лінійної частини системи вигляду

$$W_l^*(j\omega) = \operatorname{Re} W_l(j\omega) + j\omega \operatorname{Im} W_l(j\omega), \quad (1.63)$$

тобто уявна частина множиться на ω .

1.6.2 Критерій Попова для систем зі стійкою лінійною частиною

Система зі стійкою лінійною частиною абсолютно стійка, якщо через точку з координатами $(-1/k, j0)$ можна провести хоча б одну пряму лінію так, щоб вся характеристика $W_L^*(j\omega)$ знаходилася від неї праворуч.

Вказана пряма лінія часто називається прямою Попова, а характеристика $W_L^*(j\omega)$ – кривою Попова.

На рис. 1.32 наведено графічну інтерпретацію критерію стійкості Попова. Тут рисунок зліва відповідає абсолютно стійкій САК, а рисунок справа відповідає системі, де критерій абсолютної стійкості не виконується.

Важливо зазначити, що критерій Попова є *достатнім* але не є *необхідним*, тобто його невиконання не гарантує відсутності абсолютної стійкості в системі.

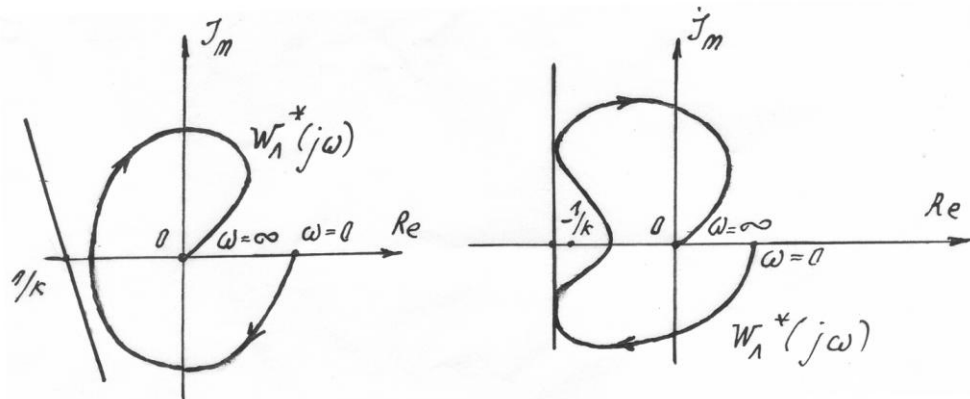


Рис. 1.32. Графічна інтерпретація критерію стійкості Попова

1.6.3 Критерій Попова для систем з нестійкою лінійною частиною

Щоб застосувати критерій Попова для нестійких та (або) нейтральних систем, здійснюється перетворення схеми до вигляду, як це зображено на рис. 1.33.

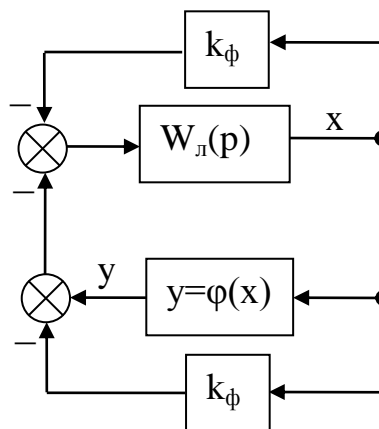


Рис. 1.33. Введення фіктивних ланок в нелінійну САК

В схему введені дві фіктивні ланки, які нічого не змінюють. Передатна функція лінійної частини з врахуванням фіктивного зворотного зв'язку буде

$$W_{л.ф}(p) = \frac{W_{л}(p)}{1 + k_{\phi} W_{л}(p)}, \quad (1.64)$$

а нелінійна характеристика з врахуванням фіктивної паралельної ланки визначатиметься як

$$\varphi_{\phi}(x) = \varphi(x) - k_{\phi} x. \quad (1.65)$$

Тут коефіцієнт k_{ϕ} вибирається таким, щоби завдяки введеному від'ємному зворотному зв'язку нова лінійна частина виявилася стійкою та щоб $k_{\phi} < k$.

Отже формулювання критерію Попова у цьому випадку є наступним: Система з нестійкою та (або) нейтральною лінійною частиною, що має не більше двох нульових полюсів, абсолютно стійка, якщо через точку з координатами

$\left(-\frac{1}{k - k_{\phi}}, j0\right)$ можна провести пряму лінію ліворуч від характеристики

тики $W_{л.ф}^*(j\omega)$. При цьому нелінійна характеристика $\varphi(x)$ має знаходитись у секторі $S(k_{\phi}, k)$, а характеристика $\varphi_{\phi}(x)$ лежатиме у секторі $S(0, k - k_{\phi})$.

Нелінійну характеристику $\varphi(x)$ для цього випадку зображено на рис. 1.34.

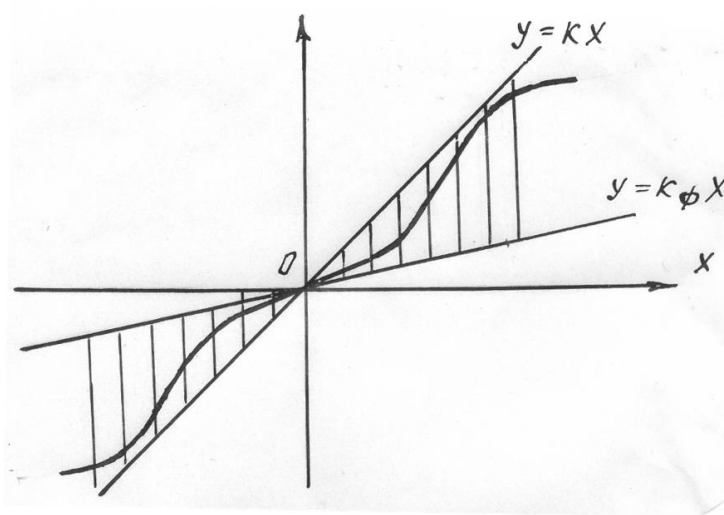


Рис. 1.34. Нелінійність $\varphi(x)$ при застосуванні критерію Пóпова для САК з нестійкою лінійною частиною

Приклад 1.3 Схема досліджуваної САК представлена на рис. 1.37, де сталі часу дорівнюють $T_1 = 0,5c$, $T_2 = 0,2c$, $T_3 = 0,1$. Визначити, при яких значеннях k система буде абсолютно стійкою, якщо характеристика нелінійної ланки буде розташована у секторі $S(0, k)$.

$$W(j\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)(1 + j\omega T_3)}. \quad (1.66)$$

Вводячи комплексно-спряжений співмножник в знаменник, матимемо

$$U(j\omega) = \operatorname{Re} W(j\omega) = \frac{1 - \omega^2(T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_1 T_3)}{(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)(1 + \omega^2 T_3^2)}, \quad (1.67)$$

$$V(j\omega) = \operatorname{Im} W(j\omega) = \frac{-\omega(T_1 + T_2 + T_3) + \omega^3 T_1 T_2 T_3}{(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)(1 + \omega^2 T_3^2)}. \quad (1.68)$$

Введемо нові функції $U^*(\omega) = U(\omega)$ и $V^*(\omega) = \omega V(\omega)$

$$V^*(j\omega) = \frac{-\omega^2(T_1 + T_2 + T_3) + \omega^4 T_1 T_2 T_3}{(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)(1 + \omega^2 T_3^2)}. \quad (1.69)$$

Тепер побудуємо $V^*(\omega) = f[U^*(\omega)]$, що відображено на рис. 1.36. Знайдемо

характерні точки: $V^*(\omega) = 0$ при частотах $\omega = 0$; $\omega = \infty$;

$\omega = \sqrt{\frac{T_1 + T_2 + T_3}{T_1 T_2 T_3}} \approx 9c^{-1}$, а $U^*(\omega) = 0$ при частотах $\omega = \infty$; $\omega = 2, 3$. Обчислимо:

$U^*(9) \approx -0,033$. Звідси $-1/k \approx -0,033$, а тому максимальне значення коефіцієнта k дорівнюватиме $k_{\max} = 30$, коли пряма і крива Попова будуть дотичними.

Отже система стійка при будь-якій нелінійній функції $y = F(x)$ у секторі $S(0, k)$, де $0 < k < 30$. Це ілюструється на рис.1.37.

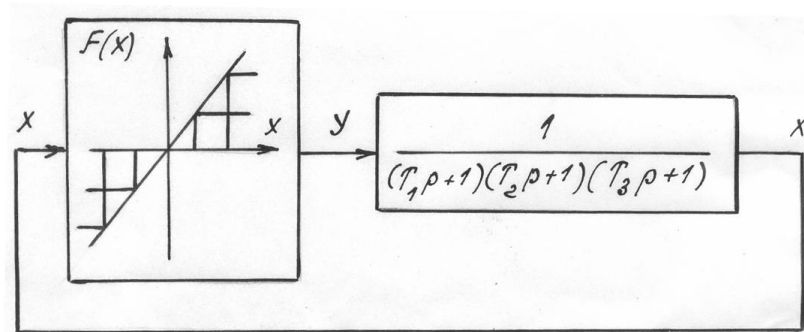


Рис. 1.35. Структурна схема системи до прикладу

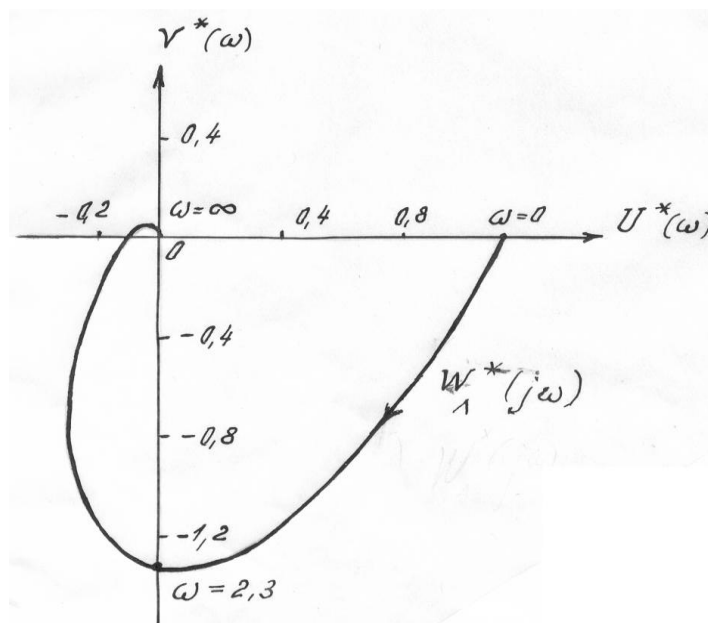


Рис. 1.36. Модифікована АФХ досліджуваної системи

Література: [1, с. 420-425].

СРС: Застосування критерію Попова у випадку нестационарних нелінійних характеристик.

Література: [1, с. 425-426].

Контрольні запитання:

1. Що таке абсолютна стійкість нелінійних систем?
2. Яким умовам має задовольняти клас нелінійностей, щоб до нього можна було застосувати поняття абсолютної стійкості?
3. Як отримати модифіковану АФХ лінійної частини САК?
4. Сформулюйте критерій абсолютної стійкості Попова для системи зі стійкою лінійною частиною.
5. Як застосувати критерій абсолютної стійкості Попова для системи з нестійкою або нейтральною лінійною частиною?
6. Чи дає критерій Попова необхідні та достатні умови абсолютної стійкості нелінійних САК?

Тема 1.7 Метод гармонічної лінеаризації

1.7.1 Сутність методу гармонічної лінеаризації

Метод гармонічної лінеаризації (метод гармонічного балансу або метод описуючих функцій) використовується для дослідження автоколивань в системах високого порядку, а також для наближеного оцінювання якості перехідних процесів в нелінійних системах.

Основу цього наближеного методу складають наступні положення. Нехай маємо нелінійну ланку $y = F(x)$, як показано на рис. 1.37. Подамо на її вхід сигнал $x = a \sin \omega t$, тоді на виході отримаємо $y = F(a \sin \omega t)$. Цей періодичний сигнал можна розкласти в ряд Фур'є.

$$y = F(a \sin \omega t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t), \quad (1.70)$$

де

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(a \sin \omega t) d(\omega t);$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(a \sin \omega t) \cos n\omega t d(\omega t);$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(a \sin \omega t) \sin n\omega t d(\omega t);$$

Таким чином, на вхід лінійної ланки поступає спектр гармонік.

Розглянемо нелінійну систему з одною нелінійністю, яку можна виокремити. Схема системи представлена на рис. 1.38.

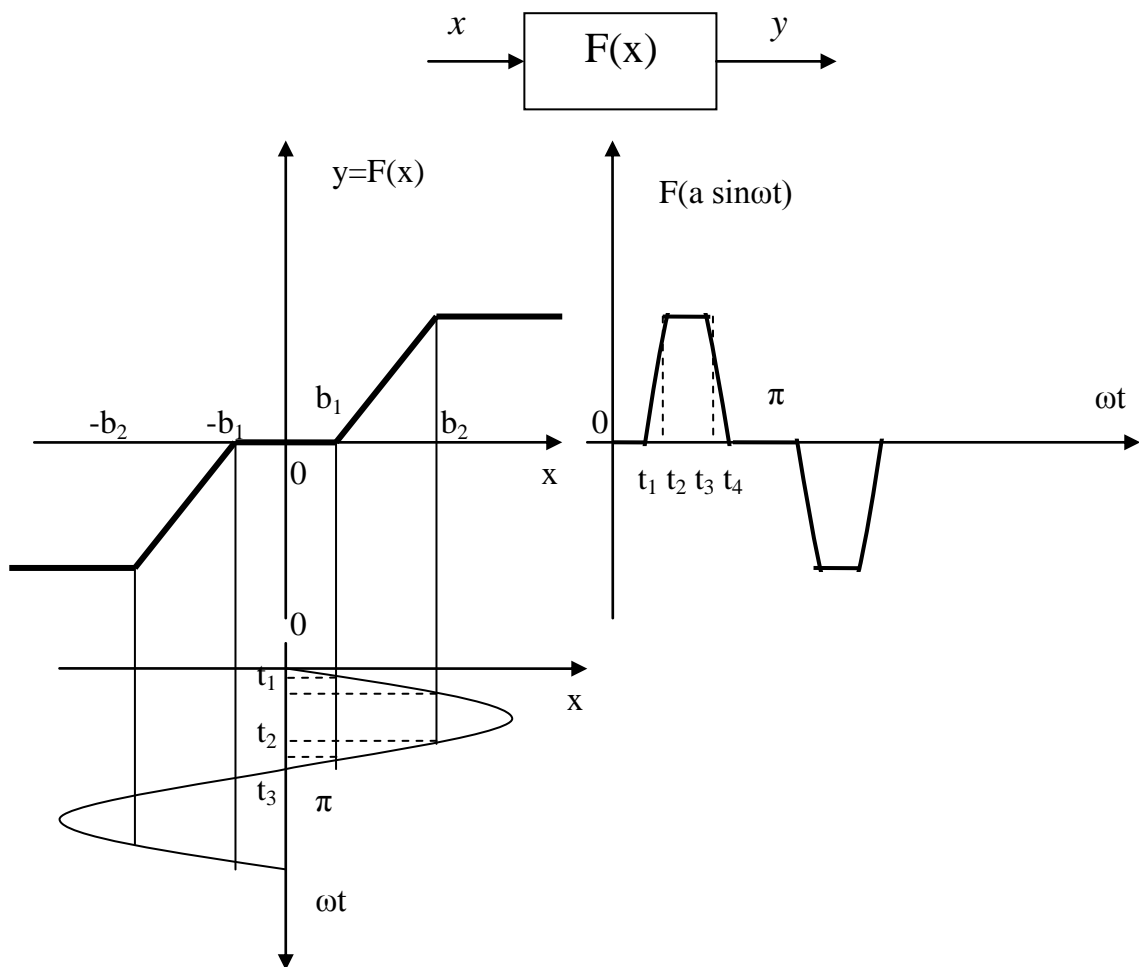


Рис. 1.37. Проходження гармонічного сигналу через ланку $y = F(x)$

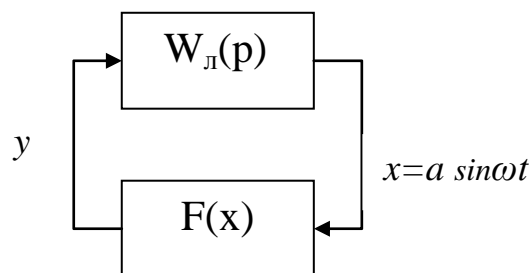


Рис. 1.38. Схема системи з виокремленою нелінійністю

Тоді лінійна частина має передатну функцію

$$W_{\text{л}}(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}. \quad (1.71)$$

Амплітудна частотна характеристика має вигляд, як показано на рис. 1.39. Характеристика 1 справедлива за наявності нульового полюсу в передатній функції.

Нехай в системі можливі автоколивання. Відмітимо осі абсцис частоту першої та наступних гармонік на: ω , 2ω , 3ω . Тоді, згідно із рис. 1.39, можна записати нерівність

$$|W_n(jn\omega)| \ll |W_1(j\omega)|, \quad n=2,3, \dots \quad (1.72)$$

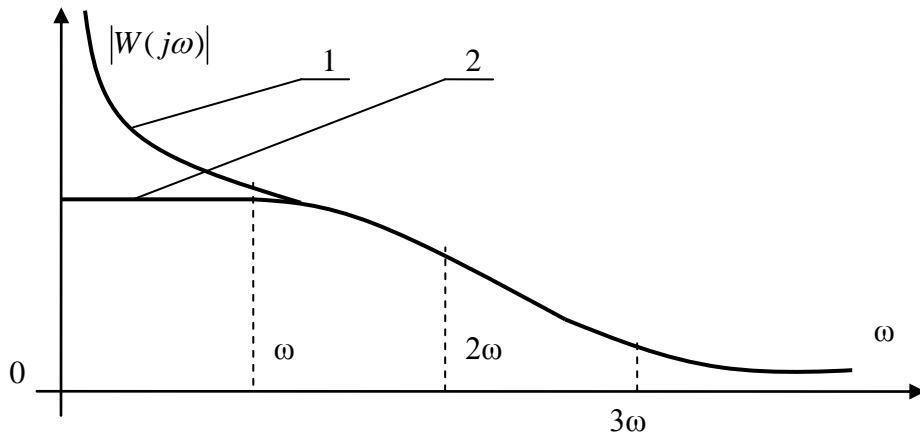


Рис. 1.39. АЧХ лінійної частини системи

Виконання нерівності (1.72) називається *властивістю фільтра лінійної частини* системи, за наявності якої лінійна частина системи не буде пропускати вищі гармоніки. Тому змінна $x(t)$ на вході нелінійної ланки буде близькою до синусоїди

$$x = a \sin \omega t.$$

Таким чином, допустивши, що лінійна частина є фільтром низьких частот, можна вважати, що автоколивання на вході нелінійної ланки синусоїдні.

Дослідимо проходження першої гармоніки при симетричних коливаннях

$$y = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t. \quad (1.73)$$

Для симетричних коливань постійна складова відсутня, тобто $A_0 = 0$. Розділимо та помножимо на a співвідношення (1.73)

$$y = \frac{A_1}{a} a \cos \omega t + \frac{B_1}{a} a \sin \omega t, \quad (1.74)$$

тоді, позначивши

$$\frac{B_1}{a} = q(a), \quad \frac{A_1}{a} = q'(a),$$

отримаємо

$$y = q(a)a \sin \omega t + q'(a)a \cos \omega t. \quad (1.75)$$

Замітимо, що $x = a \sin \omega t$ та $px/\omega = a \cos \omega t$, де $p = \frac{d}{dt}$. Таким чином маємо

$$y = F(x) = \left[q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p \right] x; \quad (1.76)$$

$$\text{де } q = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi) \sin \psi d\psi; \quad q' = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi) \cos \psi d\psi; \quad \psi = \omega t.$$

Таке представлення нелінійної ланки називається *гармонічною лінеаризацією нелінійності*, а $q(a)$ та $q'(a)$ – *коефіцієнтами лінеаризації*.

Передатна функція гармонічно лінеаризованої ланки

$$W_n(a, p) = q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p. \quad (1.77)$$

Амплітудно-фазова характеристика при $p = j\omega$ має вигляд

$$W_n(a, j\omega) = q(a) + jq'(a). \quad (1.78)$$

Вона залежить тільки від амплітуди та не залежить від частоти для однозначних та неоднозначних статичних нелінійностей. Проте для динамічних нелінійностей АФХ залежатиме від амплітуди та від частоти $W_n(a, j\omega) = W_n(a, \omega)$ [1, 3].

Література: [1, с. 429-434].

СРС: Задачі для самостійного розв'язання: Задача 1 [5, с. 27].

Література: [5, с. 24-28].

Контрольні запитання:

1. Поясніть сутність методу гармонічної лінеаризації нелінійних систем?
2. У чому полягає властивість фільтра лінійної частини нелінійної САК?
3. Що таке автоколивання та якими параметрами вони характеризуються?
4. Для чого використовується метод гармонічної лінеаризації нелінійних ланок в теорії автоматичного керування?
5. Запишіть у загальному вигляді передатну функцію гармонічно лінеаризованої нелінійної ланки.

1.7.2 Обчислення коефіцієнтів гармонічної лінеаризації

1.7.2.1 Релейна характеристика

Процес проходження гармонічного сигналу через ідеальне двопозиційне реле показано на рис. 1.40.

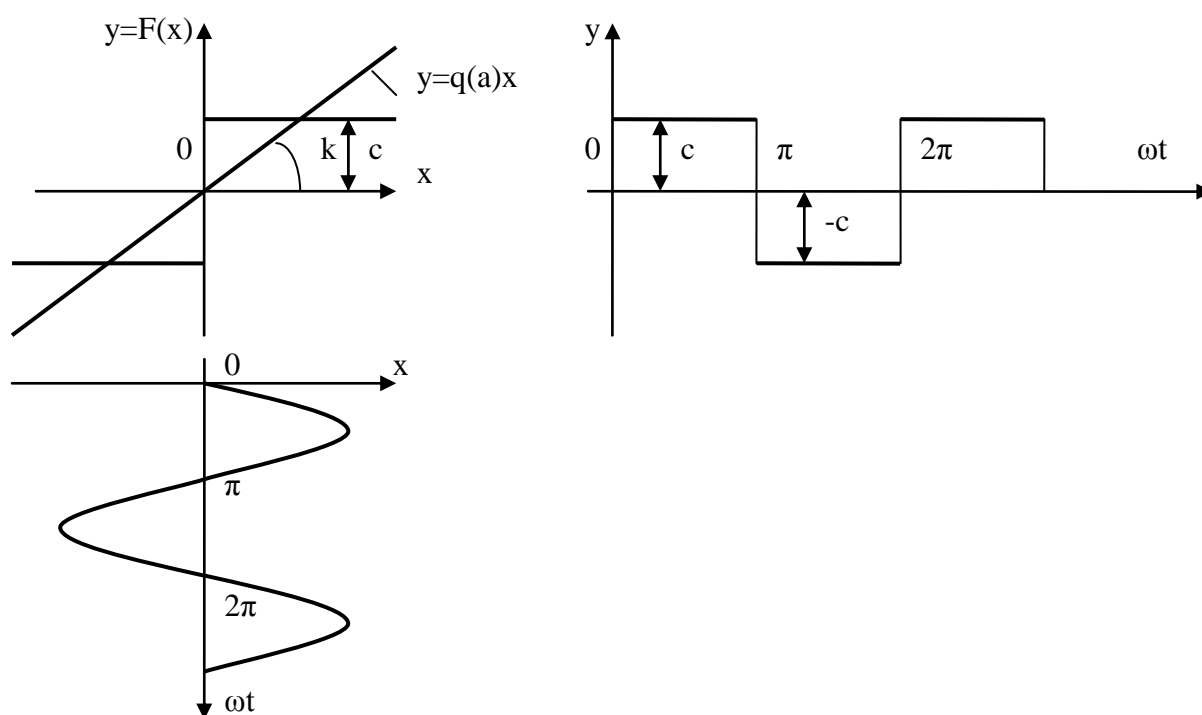


Рис. 1.40. Проходження гармонічного сигналу через двопозиційне реле

Аналізуючи цей рисунок, відмічаємо, що при однозначній та непарно-симетричній нелінійності $F(x)$ будуть справедливими співвідношення

$$y = F(x) = q(a)x; \quad q'(a) = 0.$$

Визначимо коефіцієнт гармонічної лінеаризації $q(a)$ як

$$\begin{aligned}
 q(a) &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi) \sin \psi d\psi = \frac{1}{\pi a} \int_0^{\pi} c \sin \psi d\psi + \\
 &+ \frac{1}{\pi a} \int_{\pi}^{2\pi} -c \sin \psi d\psi = \frac{c}{\pi a} (-\cos \psi_0^{\pi} + \cos \psi_{\pi}^{2\pi}) = \frac{4c}{\pi a};
 \end{aligned}
 \tag{1.79}$$

Залежність коефіцієнта гармонічної лінеаризації $q(a) = \frac{4c}{\pi a}$ показана на рис. 1.41.

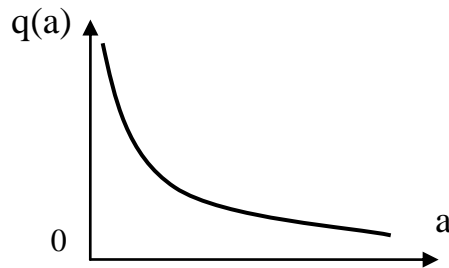


Рис. 1.41. Залежність коефіцієнта гармонічної лінеаризації від амплітуди

Таким чином, шляхом застосування методу гармонічної лінеаризації нелінійна ланка замінюється лінійною ланкою, коефіцієнт підсилення якої $q(a)$ залежить від амплітуди автоколивань a .

1.7.2.2 Релейна характеристика із зоною нечутливості

Процес проходження гармонічного сигналу через реле із зоною нечутливості (ідеальне трипозиційне реле) показано на рис. 1.42.

Оскільки, як і в попередньому випадку, нелінійна характеристика є однозначною та непарно-симетричною, то за допомогою гармонічної лінеаризації вона може бути представлена залежністю

$$y = F(x) = q(a)x,$$

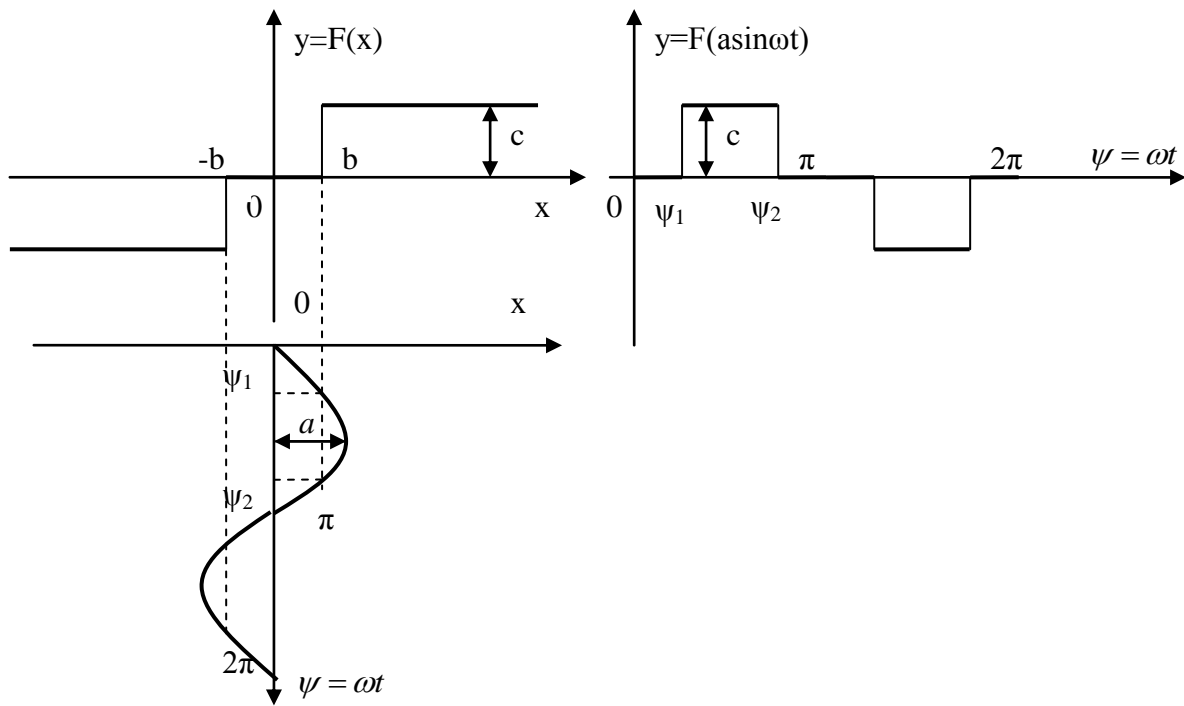


Рис. 1.42. Проходження гармонічного сигналу через трипозиційне реле

$$y = F(x) = q(a)x,$$

де коефіцієнт $q(a)$ дорівнюватиме

$$\begin{aligned} q(a) &= \frac{4}{\pi a} \int_0^{\pi/2} F(a \sin \psi) \sin \psi d\psi = \\ &= \frac{4}{\pi a} \left(\int_0^{\psi_1} 0 \sin \psi d\psi + \int_{\psi_1}^{\pi/2} C \sin \psi d\psi \right) = \frac{4}{\pi a} (-C \cos \psi \Big|_{\psi_1}^{\pi/2}) = \frac{4C}{\pi a} (0 + \cos \psi_1). \end{aligned} \quad (2.80)$$

Після інтегрування отримаємо:

$$q(a) = \frac{4C}{\pi a} \cos \psi_1.$$

Але $x = a \sin \psi$, а при $\omega t = \psi_1$ буде $x = b$, тобто $b = a \sin \psi_1$; $\sin^2 \psi_1 + \cos^2 \psi_1 = 1$;

$$\cos^2 \psi_1 = 1 - \left(\frac{b}{a} \right)^2; \cos \psi_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a} \right)^2}; \quad (1.81)$$

Таким чином отримаємо при $a \geq b$

$$q(a) = \frac{4C}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}; \quad (1.82)$$

при $a < b$; $q = 0$. Графік залежності (1.82) зображений на рис. 1.43.

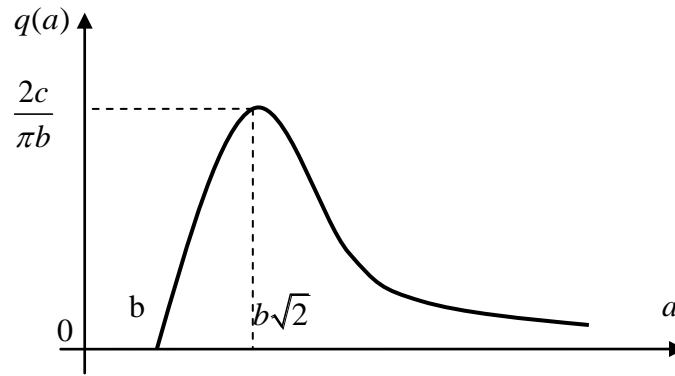


Рис. 1.43. Графік $q(a)$ для трипозиційного реле

1.7.2.3 Нелінійність типу насичення

Для даної нелінійності, що зображена на рис. 1.44, $q(a)$ визначається

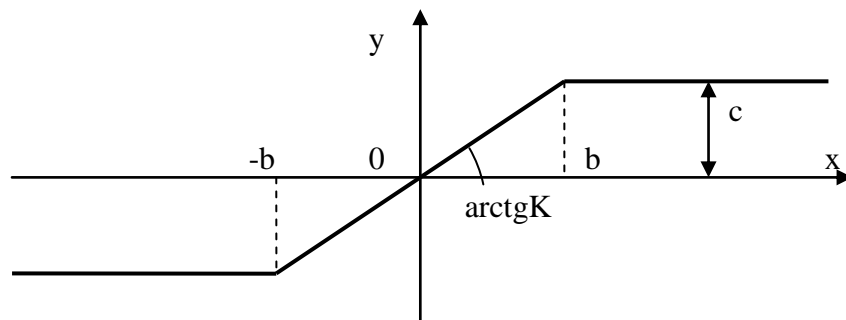


Рис. 1.44. Нелінійна характеристика типу насичення

залежністю

$$q(a) = \frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a} \right)^2} \right), \quad (1.83)$$

при $a \geq b$, де $b = \frac{c}{k}$.

Коефіцієнт $q(a)$ показано на рис. 1.45, де $q(a) = k$ при $a \leq b$.

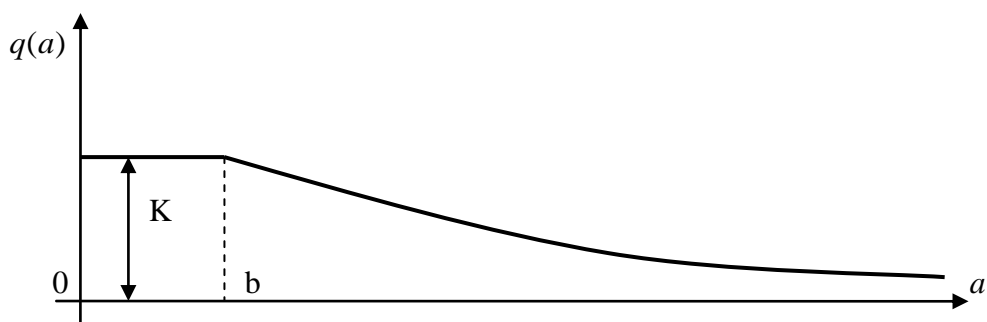


Рис. 1.45. Графік $q(a)$ для нелінійності типу насичення

1.7.2.4 Релейна характеристика з гістерезисом

Для даної нелінійності, характеристика якої та вихідний сигнал зображені на рис. 1.46, гармонічна лінеаризація визначається співвідношенням

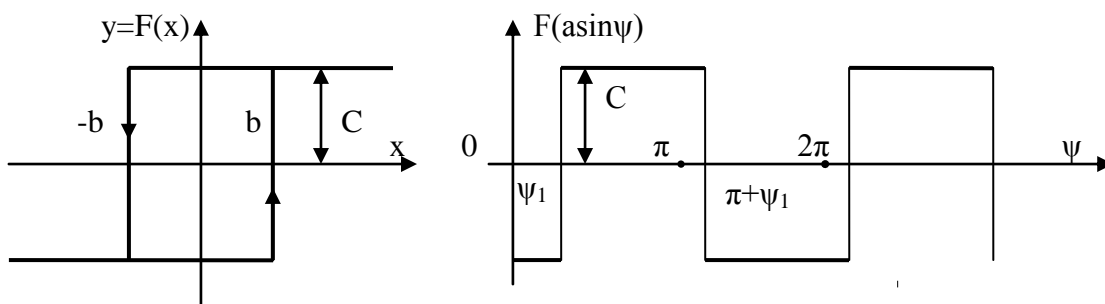


Рис. 1.46. Проходження гармонічного сигналу через реле з гістерезисом

$$y = F(x) = \left[q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p \right] x; \quad (1.84)$$

$$\begin{aligned} q(a) &= \frac{2}{\pi a} \int_0^{\pi} F(a \sin \psi) \sin \psi d\psi = \frac{2}{\pi a} \left(\int_0^{\psi_1} -C \sin \psi d\psi + \int_{\psi_1}^{\pi} C \sin \psi d\psi \right) = \\ &= \frac{2C}{\pi a} (\cos \psi_0^{\psi_1} - \cos \psi_{\pi}^{\psi_1}) = \frac{2C}{\pi a} 2 \cos \psi_1; \end{aligned}$$

$$\text{де } \cos \psi_1 = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

Таким чином маємо

$$q(a) = \frac{4C}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}. \quad (1.85)$$

Визначимо коефіцієнт $q'(a)$:

$$q'(a) = \frac{2}{\pi a} \int_0^\pi F(a \sin \psi) \cos \psi d\psi = \frac{2}{\pi a} \left(\int_0^{\psi_1} -C \cos \psi d\psi + \int_{\psi_1}^\pi C \cos \psi d\psi \right) =$$

$$\frac{2}{\pi a} (-\sin \psi_1 + 0 + \sin \pi - \sin \psi_1) = -\frac{4C}{\pi a} \sin \psi_1.$$

Оскільки $\sin \psi_1 = \frac{b}{a}$, отримаємо

$$q'(a) = -\frac{4Cb}{\pi a^2}. \quad (1.86)$$

На рис. 1.47 показані залежності коефіцієнтів гармонічної лінеаризації $q(a)$ та $q'(a)$ від амплітуди автоколивань.

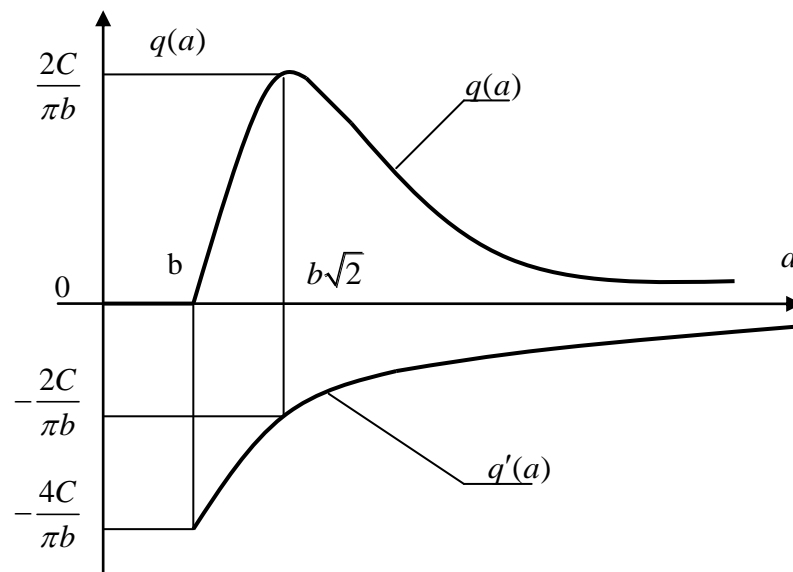


Рис. 1.47. Графіки $q(a)$ та $q'(a)$ для реле з гістерезисом

Література: [1, с. 434-437].

СРС: Задачі для самостійного розв'язання: Задача 2 [5, с. 28].

Література: [5, с. 24-28].

Контрольні запитання:

1. Якими є вимоги до лінійної частини системи при застосуванні методу гармонічної лінеаризації?
2. Яку форму повинен мати сигнал на вході нелінійної ланки згідно з методом гармонічної лінеаризації?
3. Від чого залежить АФХ гармонічно лінеаризованих статичних нелінійностей?
4. Для яких нелінійних ланок коефіцієнт лінеаризації $q'(a) = 0$?
5. Від чого залежить АФХ гармонічно лінеаризованих динамічних нелінійностей?

Тема 1.8 Алгебричний та частотний методи дослідження автоколивань

1.8.1 Алгебричний метод дослідження автоколивань – метод Попова

1.8.1.1 Визначення параметрів періодичного розв'язку

Нехай лінійна частина замкнутої системи, схема якої зображена на рис. 1.48, має передатну функцію

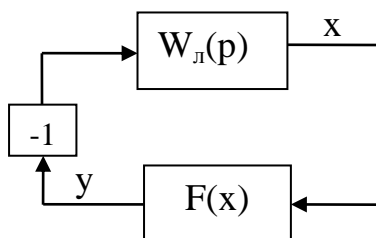


Рис. 1.48. Структурна схема нелінійної САК

$$W_l(p) = \frac{R(p)}{Q(p)} \quad (1.87)$$

Враховуючи замикання системи від'ємним зворотним зв'язком та залежність $y = F(x)$, запишемо рівняння замкнутої нелінійної системи

$$Q(p)x + R(p)F(x) = 0. \quad (1.88)$$

Після гармонічної лінеаризації нелінійності отримаємо

$$\left\{ Q(p) + R(p) \left[q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p \right] \right\} x = 0. \quad (1.89)$$

Оскільки тут $a = \text{const}$ та $\omega = \text{const}$, то дане лінеаризоване рівняння можна розглянути як лінійне.

Характеристичне рівняння замкнутої гармонічно лінеаризованої системи має вигляд

$$Q(p) + R(p) \left[q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p \right] = 0 \quad (1.90)$$

Досліджуємо періодичний розв'язок при $p = j\omega$, тобто

$$Q(j\omega) + R(j\omega) [q(a) + jq'(a)] = 0. \quad (1.91)$$

Виділимо у виразі (2.91) дійсну та уявну частини

$$X(a, \omega) + jY(a, \omega) = 0 \quad (1.92)$$

та застосуємо критерій стійкості Михайлова.

Щоб характеристичне рівняння мало чисто уявні корені $p_{1,2} = \pm j\omega$, годограф Михайлова повинен проходити через початок координат, як це показано на рис. 1.49. При цьому значення частоти у початку координат дає частоту шуканих коливань $\omega = \omega_{\Pi}$, а значення a при ω_{Π} – шукане значення амплітуди коливань.

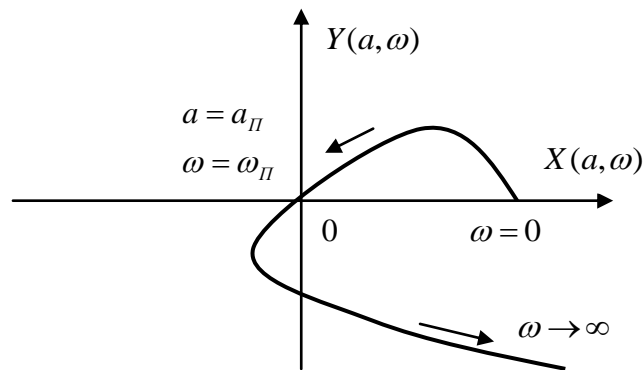


Рис. 1.49. Годограф Михайлова для системи з двома уявними полюсами

Таким чином отримаємо два рівняння, звідки визначаємо a та ω шуканого періодичного розв'язку.

$$\begin{cases} X(a, \omega) = 0; \\ Y(a, \omega) = 0. \end{cases} \quad (1.93)$$

Після визначення ω та a необхідно досліджувати стійкість періодичного розв'язку. Якщо він стійкий, то в системі є автоколивання.

1.8.1.2 Стійкість періодичного розв'язку

Для дослідження стійкості періодичного розв'язку $a = a_H$ надамо приріст Δa . Тоді при $a = a_H + \Delta a$ і годограф Михайлова займе або положення 1 (збіжні коливання), або 2 (розбіжні коливання).

Тому, якщо при $\Delta a > 0$ годограф Михайлова займе положення 1, а при $\Delta a < 0$ – положення 2, перехідний процес в системі буде сходиться до отриманого періодичного розв'язку з амплітудою a_H (рисунок 1.50).

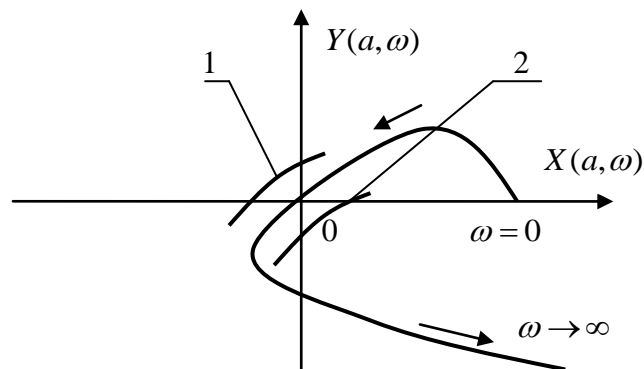


Рис. 1.50. Ілюстрація до критерію стійкості автоколивань

Але при дослідженні стійкості нема необхідності будувати годографи Михайлова. Стійкість визначається аналітичним виразом виду

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right) - \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)\left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right) > 0. \quad (1.94)$$

Доведемо це співвідношення.

Ми досліджуємо малі відхилення від отриманого періодичного розв'язку x^*

$$x = x^* + \Delta x, \quad x^* = a \sin \omega t. \quad (1.95)$$

Тоді рівняння замкнутої системи матиме вигляд

$$Q(p)(x^* + \Delta x) + R(p)F(x^* + \Delta x) = 0$$

або після розкладання рівняння в ряд в околі точки x^*

$$Q(p)(x^* + \Delta x) + R(p)\left[F(x^*) + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^* \Delta x + \dots\right] = 0.$$

Після віднімання рівняння усталеного руху $Q(p)x^* + R(p)F(x^*) = 0$ отримаємо рівняння у відхиленнях відносно періодичного розв'язку

$$Q(p)\Delta x + R(p)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^* \Delta x = 0. \quad (1.96)$$

Стійкість цього рівняння потрібно дослідити, але наявність в ньому періодичних коефіцієнтів визиває складність.

Розглянемо наближений спосіб дослідження. Надамо відхилення Δa та $\Delta \omega$ від їх значень у періодичному розв'язку $x = a \sin \omega t$. Матимемо

$$x = (a + \Delta a)e^{-\xi t} \sin(\omega + \Delta \omega)t. \quad (1.97)$$

Це рівняння затухаючого перехідного процесу близького до періодичного. Для стійкості періодичного процесу необхідно, очевидно, щоб величини Δa та ξ мали однакові знаки. У цьому разі при $\Delta a > 0$ амплітуда зменшуватиметься, а при $\Delta a < 0$ – збільшуватиметься, прагнучи до значення a .

Використаємо символічний запис $x = ae^{j\omega t}$ для $x = a \sin \omega t$ та для затухаючого процесу $x = (a + \Delta a)e^{[-\xi + j(\omega + \Delta \omega)]t}$ або $x = (a + \Delta a)e^{j[\omega + \Delta \omega + j\xi]t}$, так як $-1 = j^2$.

Перший розв'язок визначався рівнянням

$$X(a, \omega) + jY(a, \omega) = 0. \quad (1.98)$$

Аналогічно отримаємо

$$X(a + \Delta a, \omega + \Delta \omega + j\xi) + jY(a + \Delta a, \omega + \Delta \omega + j\xi) = 0. \quad (1.99)$$

Розкладаючи цей вираз в ряд Тейлора та віднімаючи попередній, дістанемо

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)^* \Delta a + \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^* (\Delta \omega + j\xi) + j\left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right)^* \Delta a + j\left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* (\Delta \omega + j\xi) = 0, \quad (1.100)$$

де зірочка означає підставлення значень a та ω , що відповідають періодичному розв'язку. Виділивши дійсну та уявну частини, і вилучивши з отриманих двох рівнянь $\Delta \omega$, маємо

$$\xi = \frac{\left(\frac{\partial X}{\partial a} \frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* - \left(\frac{\partial X}{\partial \omega} \frac{\partial Y}{\partial a}\right)^*}{\left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^2 - \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^2} \Delta a. \quad (1.101)$$

Для стійкості періодичного розв'язку, як було зазначено вище, потрібна однаковість знаків ξ та Δa . Виходячи з (1.101) це значить, що має виконуватись нерівність

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a} \frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^* - \left(\frac{\partial X}{\partial \omega} \frac{\partial Y}{\partial a}\right)^* > 0. \quad (1.102)$$

В доповнення до цього співвідношення необхідністю є виконання критерію Гурвіца чи Михайлова для характеристичного рівняння гармонічно лінеаризованої системи, окрім використаних нами для утворення коливань пари чисто уявних коренів, тобто для рівняння

$$\frac{Q(p) + R(p) \left(q + \frac{q'}{\omega} p \right)}{p^2 + \omega^2} = 0. \quad (1.103)$$

У випадку систем 3-го та 4-го порядку для цього достатнім є додатність коефіцієнтів характеристичного рівняння лінеаризованої системи (1.90).

Отже *критерієм стійкості періодичного розв'язку* є нерівність (1.102) з доповненням (1.103), якщо досліджується САК вище 4-го порядку.

На заключному етапі застосування методу Є.П. Попова проводиться перевірка фільтруючих властивостей лінійної частини системи. При цьому повинна виконуватись нерівність

$$\left| \frac{R(jn\omega_0)}{Q(jn\omega_0)} \right| \ll \left| \frac{R(j\omega_0)}{Q(j\omega_0)} \right|, \quad n = 3, 5, \dots$$

де ω_0 – знайдена частота автоколивань при врахуванні одної тільки першої гармоніки.

Метод Є.П. Попова можна використати для декількох нелінійних ланок. Його важливою характеристикою є можливість застосування до досить широкого класу нелінійних систем.

1.8.1.3 Приклади дослідження автоколивань методом Попова

Приклад 1.4. Нехай маємо одноконтурну САК з $U = F(x)$, схема якої зображена на рис. 1.51. Треба дослідити цю систему щодо автоколивань.

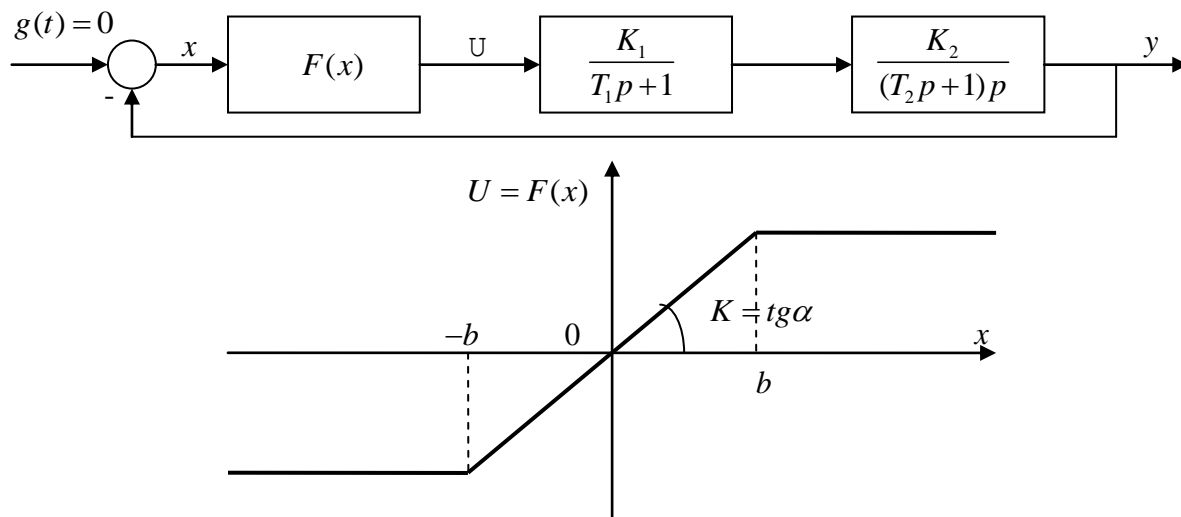


Рис. 1.51. Нелінійна характеристика та схема системи до прикладу

$$q = \begin{cases} K, \text{ при } -a \leq b \\ \frac{2K}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right), \text{ при } -a \geq b \end{cases}$$

Розв'язання. Рівняння замкнутої системи після гармонічної лінеаризації має вигляд (при $K_n = K_1 K_2$)

$$\left[(T_2 p^2 + p)(T_1 p + 1) + K_n q(a) \right] x = 0. \quad (1.104)$$

Підставляючи $p = j\omega$, отримаємо два рівняння

$$\left. \begin{aligned} X(a, \omega) &= 0; & K_n q(a) - (T_1 + T_2) \omega^2 &= 0 \\ Y(a, \omega) &= 0; & \omega - T_1 T_2 \omega^3 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (1.105)$$

З другого рівняння визначаємо ω , а з першого - a :

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}; \quad q(a) = \frac{T_1 + T_2}{K_n T_1 T_2}. \quad (1.106)$$

З графіку коефіцієнта $q(a)$, що зображений на рис. 1.52, отримуємо значення амплітуди автоколивань.

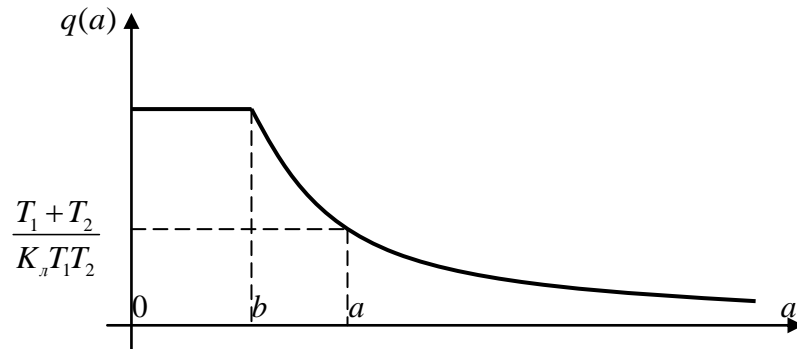


Рис. 1.52. Залежність $q(a)$ до прикладу

При параметрах $T_1 = 0,01 \text{ c}$; $T_2 = 0,04 \text{ c}$; $K_n = 1$; $b = 0,5$; $K = 200$, частота автоколивань $\omega_0 = 50 \text{ c}^{-1}$, а амплітуда $a = 1$.

Досліджуємо стійкість автоколивань. Визначаємо частинні похідні.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial X}{\partial a} \right) &= K_n \left(\frac{\partial q}{\partial a} \right) < 0, \quad \left(\frac{\partial X}{\partial \omega} \right) = -2(T_1 + T_2)\omega < 0, \\ \left(\frac{\partial Y}{\partial a} \right) &= 0, \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega} \right) = (1 - 3T_1 T_2 (\omega)^2) = -2. \end{aligned} \quad (1.107)$$

Бачимо, що критерій виконується. Отже в системі існують автоколивання.

Тепер треба перевірити виконання умови фільтра. Визначимо частотну характеристику лінійної частини системи

$$A(\omega) = \frac{K}{\omega \sqrt{1 + \omega^2 T_1^2} \sqrt{1 + \omega^2 T_2^2}}.$$

За цим виразом на частотах 1-ї та 3-ї гармонік отримаємо $A(\omega_0) = 1,2 \cdot 10^{-2}$ та $A(3\omega_0) = 0,12 \cdot 10^{-2}$, тобто $A(3\omega_0) \ll A(\omega_0)$. Отже гіпотеза фільтра виконується.

Приклад 1.5. Слід дослідити на автоколивання попередню систему з нелінійністю $F(x)$ у вигляді релейної характеристики із зоною нечутливості.

Розв'язання. Рівняння замкнутої системи має попередній вигляд (1.104), а коефіцієнт гармонічної лінеаризації, графік якого зображений на рис. 1.53, визначається за формулою

$$q(a) = \frac{4C}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \text{ при } a \geq b.$$

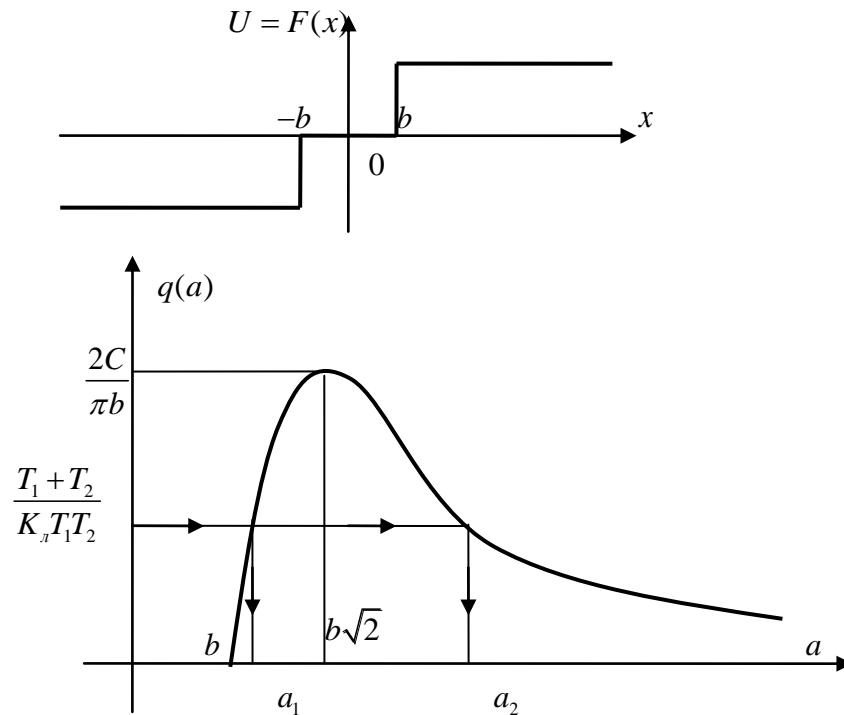


Рис. 1.53. Нелінійна характеристика та її коефіцієнт гармонічної лінеаризації

Враховуючи (1.106), бачимо, що графоаналітичне розв'язання рівняння $q(a) = \frac{T_1 + T_2}{K_n T_1 T_2}$ має два розв'язки: a_1 та a_2 . При цьому в точці $a_1 \Rightarrow \frac{dq}{da} > 0$, а у точці $a_2 \Rightarrow \frac{dq}{da} < 0$. Врахування цих знаків показує, що в точці a_1 критерій не виконується (розв'язок не стійкий), а у точці a_2 критерій виконується, тобто маємо стійкі автоколивання в даній нелінійній системі.

Виконаємо тепер аналітичний розрахунок параметрів автоколивань.

$$q(a) = \frac{T_1 + T_2}{K_n T_1 T_2} = m, \text{ де } m = \frac{T_1 + T_2}{K_n T_1 T_2}.$$

Використовуючи вираз для $q(a)$, отримуємо

$$\frac{4c\sqrt{a^2 - b^2}}{\pi a^2} = m, \quad \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{m\pi}{4c} a^2.$$

Після перетворення маємо

$$m_1^2 a^4 - a^2 + b^2 = 0,$$

де $m_1 = \frac{m\pi}{4c}$. Використовуючи числові значення параметрів з прикладу 1.4,

при $c = 100$; $b = 0.5$; $m_1 = 0.98$ дістанемо

$$y^2 - 1.04y + 0.26 = 0,$$

де $y = a^2$. В результаті розв'язання рівняння отримуємо $y_1 = 0.62$; $y_2 = 0.42$.

Звідси остаточно $a_{12} = \pm 0.79$, $a_{34} = \pm 0.65$.

Отже амплітуда автоколивань $a = 0.79$. Цей результат співпадає з наведеним вище графоаналітичним розв'язанням даної задачі, оскільки $a > b\sqrt{2} = 0.71$, що відповідає спадаючій вітці графіку $q(a)$.

Приклад 1.6. Слід дослідити періодичні режими у нелінійній одноконтурній системі, яка складається з релейного підсилювача та сервоприводу. Структурна схема системи представлена на рис. 1.54.

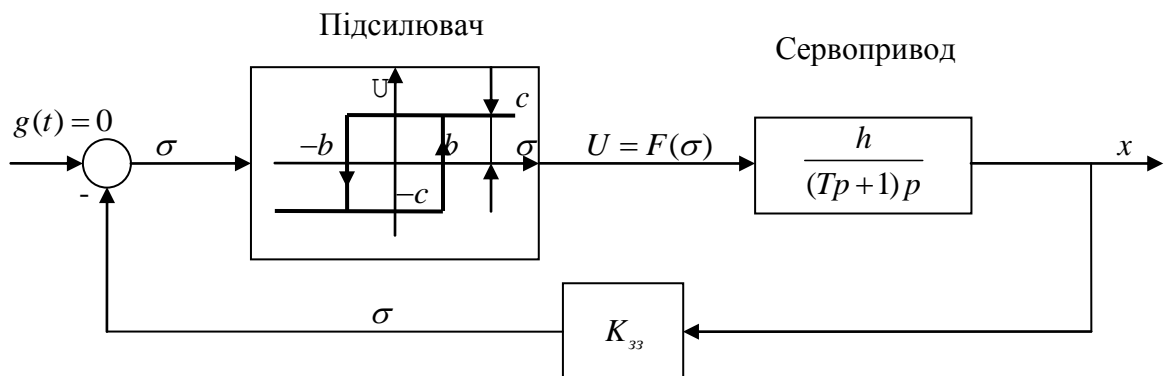


Рис. 1.54. Структурна схема системи до прикладу

Система має наступні параметри: $K_{33} = 100$ мА/рад; $C = 30$ мА; $b = 3$ мА; $h = 0.05$ рад/с/мА; $T = 0.01$ с.

Розв'язання. Характеристичне рівняння замкнутої системи після гармонічної лінеаризації має наступний вигляд

$$Tp^2 + p + hK_{33} \left[q(a) - \frac{q'(a)}{\omega} p \right] = 0;$$

або

$$Tp^2 + \left[1 - \frac{hK_{33}}{\omega} q'(a) \right] p + hK_{33} q(a) = 0. \quad (1.108)$$

Підставляючи в (1.108) $p = j\omega$ та виділяючи дійсну і уявну частини, отримаємо

$$\begin{aligned} X(a, \omega) &= hK_{33} q(a) - T\omega^2 = 0, \\ Y(a, \omega) &= \omega - q'(a)hK_{33} = 0. \end{aligned} \quad (1.109)$$

Використовуючи вираз для $q(a)$ і $q'(a)$ та підставляючи їх у (1.109), отримаємо

$$\begin{cases} T\omega^2 = \frac{4chK_{33}\sqrt{a^2 - b^2}}{\pi a^2}; \\ \pi a^2 \omega = 4CbhK_{33}. \end{cases} \quad (1.110)$$

Виключаючи з (1.110) ω , приходимо до співвідношення

$$a^2 \sqrt{a^2 - b^2} = m,$$

де $m = \frac{4ChK_{33}b^2T}{\pi}$. Після перетворень отримаємо алгебричне рівняння

$$a^6 - ba^4 - m^2 = 0. \quad (1.111)$$

Розв'язання цього рівняння з використанням підстановки $y = a^2$ дає наступне значення параметрів автоколивань

$$a \approx 3,6 \text{ мА}; \quad \omega \approx 44 \text{ рад/с.}$$

Дослідження стійкості періодичного розв'язку, здійснене у відповідності з викладеною вище методикою, вказує на те, що у контурі існують стійкі автоколивання.

Приклад 1.7. Треба дослідити методом гармонічної лінеаризації наявність автоколивань в нелінійній САК, схема якої зображена на рис. 1.55.

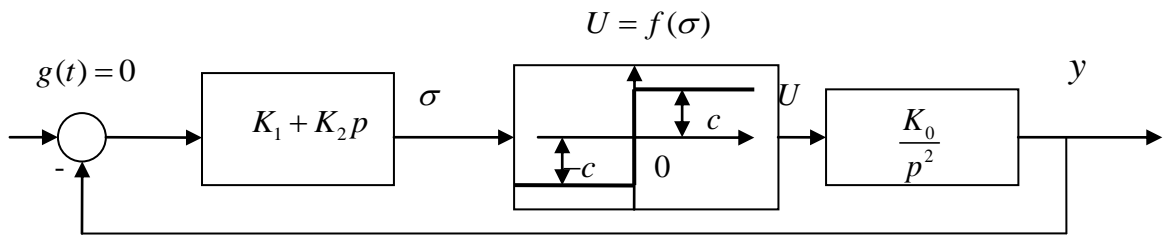


Рис. 1.55. Структурна схема нелінійної САК до прикладу

Розв'язання. Здійснюємо гармонічну лінеаризацію нелінійності

$$U = f(\sigma) = q(a)\sigma.$$

Характеристичне рівняння замкнутої гармонічно лінеаризованої САК має вигляд

$$1 + W_p(p) = 0,$$

$$\text{де } W_p(p) = \frac{K_0 q(a)(K_1 + K_2 p)}{p^2} \text{ або}$$

$$p^2 + K_0 q(a) K_2 p + K_0 K_1 q(a) = 0.$$

Після підстановки $p = j\omega$, отримаємо

$$D(j\omega, a) = -\omega^2 + jK_0 K_2 q(a)\omega + K_0 K_1 q(a) = 0.$$

Розділивши дійсну та уявну частини, дістанемо систему з двох рівнянь

$$X(a, \omega) = K_0 K_1 q(a) - \omega^2 = 0;$$

$$Y(a, \omega) = K_0 K_2 q(a)\omega = 0.$$

З 2-го рівняння маємо $\omega = 0$, а 1-ше рівняння дає $a = \infty$, оскільки

$$K_0 K_1 \frac{4c}{\pi a} = 0. \text{ Отже автоколивання в нелінійній САК відсутні. А так як коефі-}$$

цієнти характеристичного рівняння додатні при будь-яких значеннях амплітуди, то у відповідності з критерієм Гурвіца система абсолютно стійка.

Зазначимо, що цей результат збігається з результатом, отриманим нами раніше методом фазової площини.

Приклад 1.8. Слід дослідити методом гармонічної лінеаризації наявність та стійкість автоколивань в нелінійній САК, схема якої зображена на рис. 1.56.

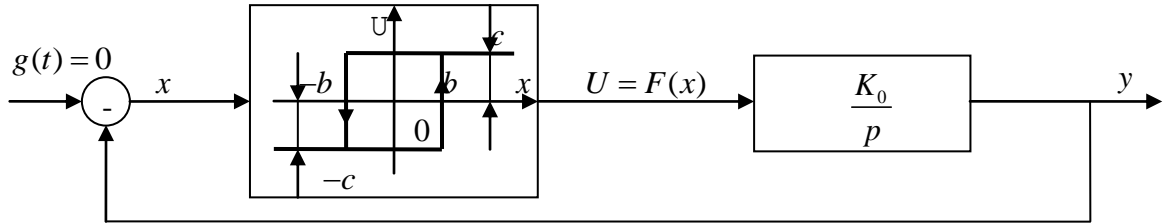


Рис. 1.56. Структурна схема досліджуваної системи

Розв'язання. Характеристичне рівняння замкнутої гармонічно лінеаризованої САК має вигляд

$$1 + \frac{K_0 \left[q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p \right]}{p} = 0,$$

або, перетворюючи,

$$\left[1 + \frac{K_0 q'(a)}{\omega} \right] p + K_0 q(a) = 0.$$

Після підстановки $p = j\omega$ отримаємо рівняння годографа Михайлова

$$D(j\omega) = j[\omega + K_0 q'(a)] + K_0 q(a) = 0.$$

Виділимо дійсну та уявну частини та прирівняємо їх до нуля:

$$X(a, \omega) = K_0 q(a) = 0;$$

$$Y(a, \omega) = \omega + K_0 q'(a) = 0.$$

З 1-го рівняння визначимо амплітуду автоколивань

$$\frac{K_0 4c}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - b^2} = 0 \Rightarrow 4cK_0 \sqrt{a^2 - b^2} = 0.$$

У підсумку отримаємо $a = \pm b$. З фізичних міркувань $a = b$.

З другого рівняння знаходимо значення ω :

$$\omega - K_0 \frac{4cb}{\pi a^2} = 0 \Rightarrow \omega = \frac{4cK_0 b}{\pi b^2} = \frac{4cK_0}{\pi b}.$$

Тепер досліджуємо стійкість періодичного розв'язку за критерієм

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right) - \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)\left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right) > 0.$$

Обчислюємо:

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a}\right) = K_0 \left(\frac{\partial q}{\partial a}\right) > 0 \text{ при } a = b; \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right) = 1; \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right) = 0; \left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right) = \frac{K_0 8c}{\pi b^2}.$$

$$K_0 \left(\frac{\partial q}{\partial a}\right) \times 1 > 0 \times \frac{K_0 8c}{\pi b^2}.$$

Отже маємо стійкі автоколивання.

Література: [1, с. 445-448].

СРС: Задачі для самостійного розв'язання: Задача 1 [5, с. 39].

Література: [5, с. 34-44].

Контрольні запитання:

1. На якому критерії стійкості ґрунтується метод Попова дослідження автоколивань?
2. Як визначається стійкість автоколивань при використанні методу Попова?
3. При скількох нелінійностях можна використовувати метод Попова?
2. Що слід перевіряти на заключному етапі дослідження автоколивань методом Попова?
5. Як має проходити годограф вектора Михайлова, щоб характеристичне рівняння замкнутої системи мало чисто уявні корені?
6. У чому особливість перевірки стійкості автоколивань для систем вище 4-го порядку при використанні методу Попова?
7. Запишіть у загальному вигляді передатну функцію гармонічно лінеаризованої ланки типу двопозиційне ідеальне реле.

8. Як виконується перевірка гіпотези фільтра?
9. Запишіть у загальному вигляді передатну функцію гармонічно лінеаризованої ланки типу двопозиційне реле з гістерезисом.
10. Від чого залежить коефіцієнт передачі гармонічно лінеаризованої ланки типу зона нечутливості?

1.8.2 Частотний метод дослідження автоколивань – метод Гольдфарба

1.8.2.1 Визначення параметрів автоколивань

Розглянемо як і раніше систему з однією нелінійністю $y = F(x)$ і

$$W_{\text{л}}(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}. \text{ Після гармонічної лінеаризації } y = F(x) = \left[q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p \right] x \text{ і}$$

АФХ розімкнутої системи матиме вигляд

$$W_p(j\omega) = W_{\text{л}}(j\omega)W_{\text{н}}(a) = \frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)} [q(a) + jq'(a)]. \quad (1.111)$$

Періодичний розв'язок за критерієм Найквіста відповідатиме проходженню $W_p(j\omega)$ через точку $(-1, j0)$. Маємо $W_{\text{л}}(j\omega)W_{\text{н}}(a) = -1$ або

$$W_{\text{л}}(j\omega) = -\frac{1}{W_{\text{н}}(a)}, \quad (1.112)$$

де

$$W_{\text{н}}(a) = q(a) + jq'(a). \quad (1.113)$$

Рівняння (1.112) дає змогу визначити a і ω автоколивань і розв'язується графічно. Це рівняння було запропоноване радянським ученим Л.С. Гольдфарбом і має назву рівняння Гольдфарба.

Точка А перетину двох АФХ $W_{\text{л}}(j\omega)$ та $-\frac{1}{W_{\text{н}}(a)}$ визначає a і ω , як це показано на рис. 1.57. Причому значення частоти ω розраховується за $W_{\text{л}}(j\omega)$, а амплітуди a – з кривої $-\frac{1}{W_{\text{н}}(a)}$.

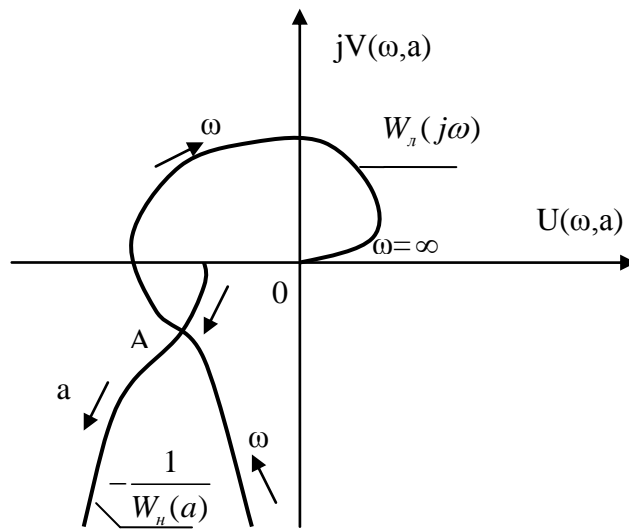


Рис. 1.57. Ілюстрація методу Гольдфарба

Тут можна використати два скалярних рівняння. Перше знаходимо з рівності модулів двох АФХ

$$|W_n(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{q^2(a) + q'^2(a)}}, \quad (1.114)$$

а друге – з рівності фаз

$$\arg W_n(j\omega) = -180^\circ - \arctg \frac{q'(a)}{q(a)}. \quad (1.115)$$

З них можна знайти шукані a і ω .

1.8.2.2 Дослідження стійкості автоколивань

Дослідимо періодичний розв'язок з позиції стійкості. При цьому режим періодичних рухів беремо за положення рівноваги. Розглянемо динаміку системи у відхиленнях.

Дамо амплітуді a відхилення Δa . Тоді при $\Delta a > 0$ критерій Найквіста має справджуватись, так як процес затухає, а при $\Delta a < 0$ – має порушуватися, так як процес розбігається. Отже має справджуватися нерівність $|W_n(j\omega)W_n(a + \Delta a)| < 1$ при $\Delta a > 0$ чи

$$|W_{\lambda}(j\omega)| < \left| \frac{1}{W_{\mu}(a + \Delta a)} \right|. \quad (1.116)$$

Це означає, що додатний відлік амплітуди вздовж кривої $-\frac{1}{W_{\mu}(a)}$ повинен бути направлений з середини назовні через криву $W_{\lambda}(j\omega)$ при стійкому періодичному розв'язку, а якщо всередину, то такий розв'язок не стійкий, як це зображено на рис. 1.58.

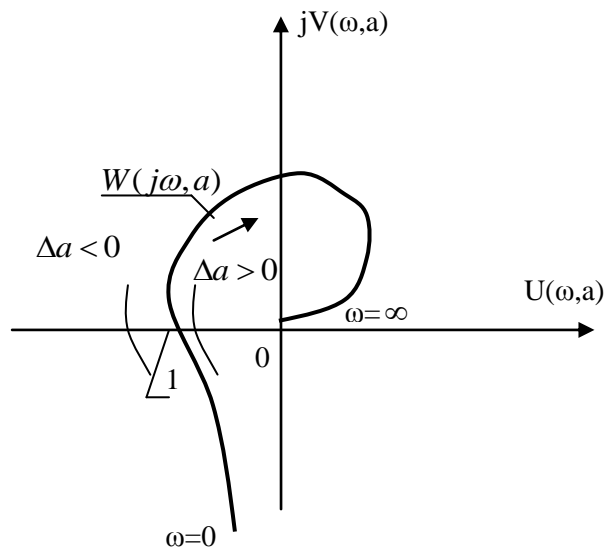


Рис. 1.58. Перевірка стійкості автоколивань

Отже *метод Гольдфарба застосовується* для таких нелінійних систем, де лінійна частина задовольняє трьом умовам: стійкість в розімкнутому стані, виконання гіпотези фільтра, порядок астатизму не вищий 1-го. В системі може бути одна нелінійна ланка, як розглянуто нами вище, або декілька нелінійних ланок. Другий варіант описаний в [1].

1.8.2.3 Приклади дослідження автоколивань методом Гольдфарба

Приклад 1.9. Розглянемо систему з нелінійністю релейного типу і зоною нечутливості, схема якої зображена на рис. 1.51 (приклад 1.5). Параметри системи $T_1 = T_2 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ c}$; $K_{\lambda} = 0.82$; $b = 0.25$; $c = 110$.

Розв'язання. Інверсна характеристика нелінійної ланки має вигляд, як показано на рис. 1.59, а.

$$q(a) = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}; \quad -\frac{1}{W_n(a)} = -\frac{1}{q(a)} = -\frac{\pi a^2}{4c\sqrt{a^2 - b^2}}. \quad (1.117)$$

Модуль АФХ лінійної частини системи дорівнює

$$|W_n(j\omega)| = \frac{K_n}{\omega \sqrt{(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)}}. \quad (1.118)$$

Фазова частотна характеристика визначається як

$$\varphi_n(\omega) = -90^\circ - \arctg \omega T_1 - \arctg \omega T_2. \quad (1.119)$$

Побудуємо характеристики $W_n(j\omega)$ та $-1/W_n(a)$, що наведені на рис. 1.59, б.

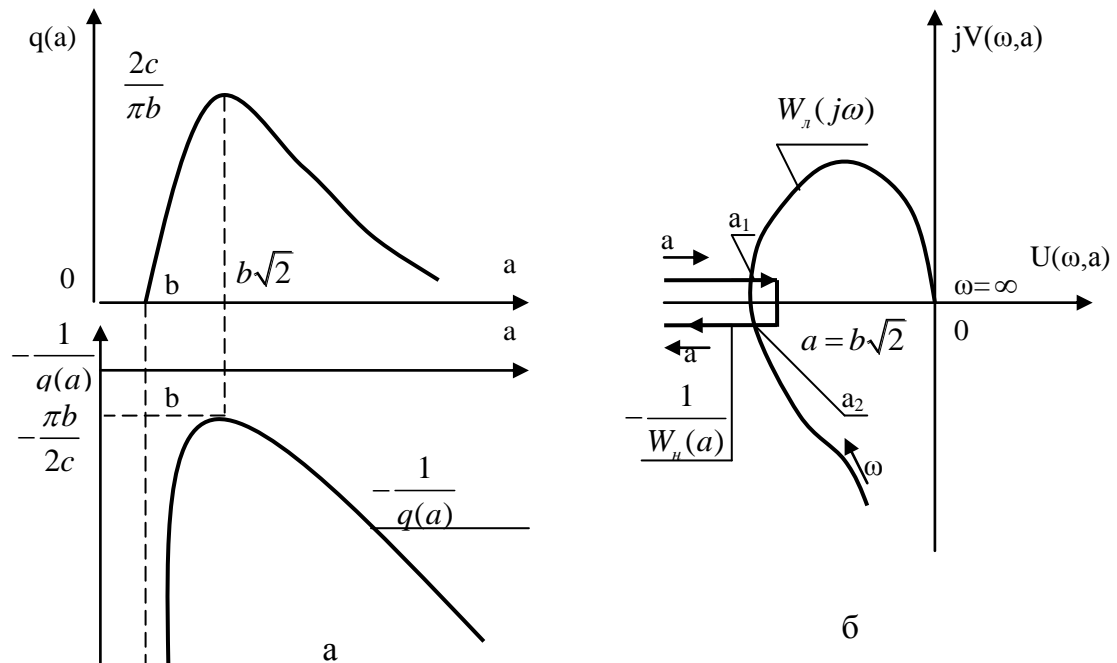


Рис. 1.59. Дослідження системи з трипозиційним реле: а – залежності $q(a)$ та $-1/q(a)$; б – графічне розв'язання рівняння Гольдфарба

Послідовність розв'язання задачі наступна:

1. Визначаємо ω_a з умови $V(\omega) = 0$ чи $\varphi_n(\omega) = -180^\circ$.
2. Знаходимо $|W_n(j\omega)|$ чи $U(\omega)$ при ω_a .
3. З рівняння $|W_n(j\omega)|_{\omega=\omega_a} = -1/q(a)$ отримуємо значення a_1 та a_2 .

4. З двох розв'язків a_1 і a_2 вибираємо більше за $b\sqrt{2} = 0.25\sqrt{2} = 0.35$ значення, що потрібно для стійкості періодичного розв'язку. Цій вимозі відповідає $a_2 = 2.8$, а значення $a_1 = 0.25$ відповідає нестійким автоколиванням.

5. Перевіряємо виконання гіпотези фільтра.

Здійснивши всі обчислення у вказаній послідовності, робимо висновок, що в досліджуваній нелінійній системі існуватимуть стійкі періодичні рухи з $\omega_a = 20$ рад/с, $a_a = 2.8$.

Приклад 1.10. Треба дослідити нелінійну САК з релейним виконавчим органом, структурна схема якої показана на рис. 1.55 (приклад 1.7).

Розв'язання. Основне рівняння Гольдфарба має вигляд:

$$W_{\pi}(j\omega) = -\frac{1}{W_n(a)}.$$

Передатна функція лінійної частини має вигляд

$$W_{\pi}(p) = \frac{K_0(K_1 + K_2 p)}{p^2}.$$

Передатна функція нелінійної ланки

$$W_n = q(a) = \frac{4c}{\pi a}.$$

Побудуємо криві $Z(a) = -\frac{1}{W_n(a)}$ та $W_{\pi}(j\omega)$. Ці криві представлені на рис.

1.60, що дає змогу отримати графічний розв'язок рівняння Гольдфарба.

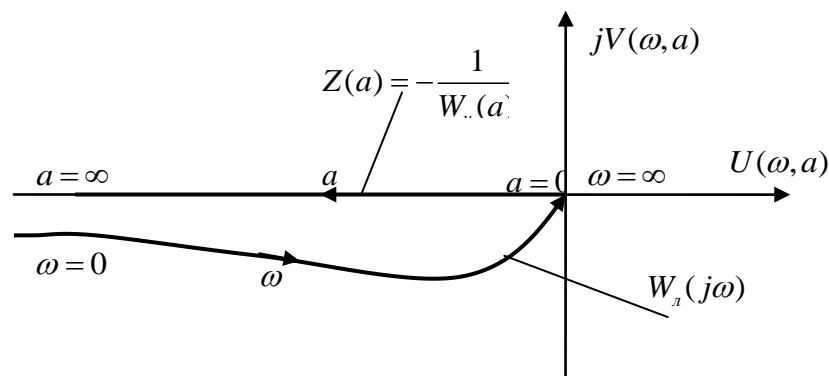


Рис. 1.60. Дослідження системи з двопозиційним реле методом Гольдфарба

Аналізуючи рисунок, бачимо, що криві $Z(a)$ та $W_{\text{л}}(j\omega)$ перетинаються в точці $a=0, \omega=\infty$. Отже автоколивання відсутні.

Далі, використовуючи критерій В.-М. Попова можна переконатися у тому, що досліджувана нелінійна система абсолютно стійка.

Приклад 1.11. Розглянемо нелінійну систему з двопозиційною релейною гістерезисною ланкою, яку ми досліджували раніше методом Попова (див. приклад 1.6).

Розв'язання. Основне рівняння Гольдфарба має вигляд:

$$W_{\text{л}}(j\omega) = -\frac{1}{W_H(a)}.$$

Частотна передатна функція нелінійної ланки має вигляд

$$W_H(a) = q(a) + jq'(a),$$

де

$$q(a) = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}, \quad q'(a) = -\frac{4cb}{\pi a^2}.$$

Інверсна характеристика нелінійної ланки визначається виразом

$$Z(a) = -\frac{1}{W_H(a)} = -\frac{1}{q(a) - jq'(a)} = -\frac{q(a) + jq'(a)}{q^2(a) + q'^2(a)} = -\frac{\frac{4c}{\pi a^2} (\sqrt{a^2 - b^2} + jb)}{\left(\frac{4c}{\pi a^2}\right)^2 (a^2 - b^2 + b^2)}.$$

$$\text{Звідки отримуємо } Z(a) = -\frac{1}{W_H(a)} = -\frac{\pi}{4c} (\sqrt{a^2 - b^2} + jb).$$

Амплітудно-фазова характеристика лінійної частини, що складається з аперіодичної та інтегрувальної ланок, має вигляд $W_{\text{л}}(j\omega) = \frac{hK_{33}}{T^2(j\omega)^2 + j\omega}$.

Побудуємо криві $W_{\text{л}}(j\omega)$ та $Z(a)$, які зображені на рис. 1.61. За цим рисунком бачимо, що автоколивання у контурі є стійкими, оскільки зростання амплітуди на кривій $Z(a)$ йде зсередини назовні відносно АФХ лінійної частини системи.

Зазначимо, що тут можна отримати і аналітичне розв'язання, використовуючи рівняння Гольдфарба. Дійсно, для точки А перетину

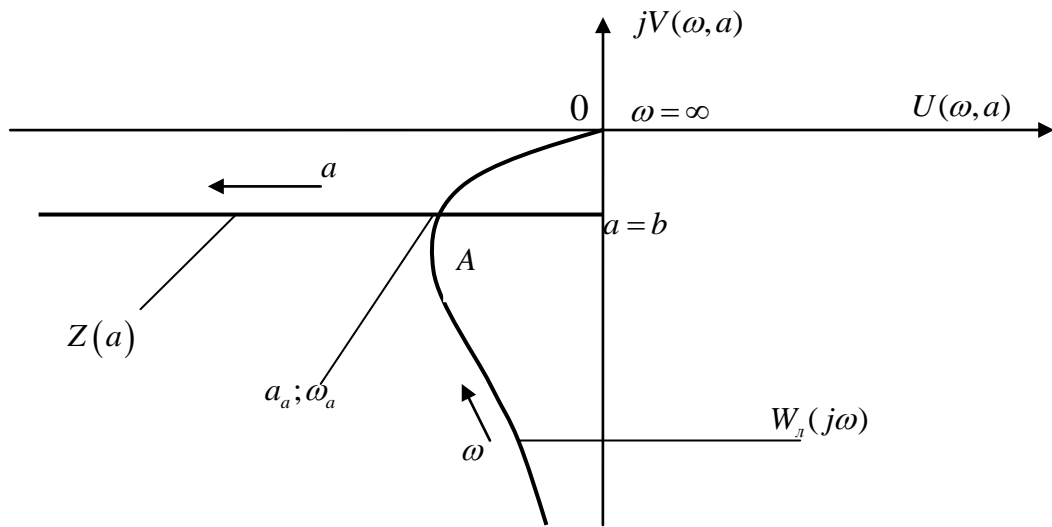


Рис. 1.61. Дослідження САК з релейною гістерезисною нелінійністю

характеристик на рис. 1.61 справедливо

$$W_n(j\omega) = Z(a);$$

$$W_n(j\omega) = -\frac{h_1 T}{1 + T^2 \omega^2} - j \frac{h_1}{\omega(1 + T^2 \omega^2)},$$

$$Z(a) = -\frac{\pi}{4c} \sqrt{a^2 - b^2} - j \frac{\pi}{4c} b.$$

де $h_1 = hK_{33}$. Прирівнюючи дійсні та уявні частини, дістаємо систему з двох рівнянь

$$\frac{h_1 T}{1 + T^2 \omega^2} = \frac{\pi}{4c} \sqrt{a^2 - b^2};$$

$$\frac{h_1}{\omega(1 + T^2 \omega^2)} = \frac{\pi b}{4c}.$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, отримуємо значення ω_a та a_a .

Література: [1, с. 439-445].

СРС: Застосування методу Гольдфарба для декількох нелінійностей.

Література: [1, с. 443-445].

Контрольні запитання:

1. На якому критерії стійкості ґрунтується частотний метод Гольдфарба дослідження автоколивань?
2. Запишіть рівняння Гольдфарба для визначення періодичних рухів в нелінійних системах.
3. Як визначається стійкість автоколивань при застосуванні методу Гольдфарба?
4. За наявності скількох нелінійностей в системі рекомендується використовувати метод Гольдфарба?
5. Якими є обмеження на лінійну частину САК у методі Гольдфарба?
6. Що слід перевірити на останньому етапі дослідження автоколивань за методом Гольдфарба?

Тема 1.9 Нелінійні коригувальні ланки

Необхідно зазначити, що можливості нелінійних коригувальних ланок значно перевищують можливості лінійних. Нелінійне коригування можна здійснювати змінюванням коефіцієнтів передачі ланок системи, використанням псевдолінійних ланок, ланок з додатним гістерезисом та іншими способами. За допомогою нелінійних коригувальних пристроїв можна розв'язувати також задачу компенсування негативного впливу небажаних нелінійностей.

До недоліків нелінійного коригування відноситься те, що воно може мати досить спеціалізований характер. Зокрема, нелінійне коригування, яке є ефективним для певного класу зовнішніх дій, може стати некорисним або навіть шкідливим при інших діях чи режимах роботи системи.

1.9.1 Нелінійне змінювання коефіцієнта передачі системи

Коефіцієнт передачі розімкнутої системи визначають, виходячи з потрібної точності роботи системи в усталених режимах. Проте його величина істотно впливає і на якість перехідного процесу. В лінійних системах при збільшенні коефіцієнта передачі зазвичай погіршується якість перехідних процесів – зростає коливальність, збільшується перерегулювання, зменшується запас стійкості. Зберегти потрібну точність роботи системи в усталеному режимі й водночас забезпечити прийнятну якість перехідного процесу можна за рахунок нелінійного змінювання коефіцієнта передачі. Для цього слід зберегти потрібну для забезпечення заданої точності величину коефіцієнта передачі при помилках керування Δx , які не перевищують допустимого значення помилки в усталеному режимі $\Delta x_{\text{доп}}$. При більших помилках коефіцієнт передачі можна змінювати нелінійно, якщо це забезпечує підвищення якості перехідного процесу.

Розглянемо можливість підвищення швидкодії системи при збереженні прийнятної якості перехідного процесу за рахунок нелінійного змінювання коефіцієнта передачі. В лінійних системах час перехідного процесу $t_n = k_0 \pi / \omega_z$ залежить від частоти зрізу ω_z ЛАХ розімкнутої системи. Таке саме співвідношення можна прийняти і для гармонічно лінеаризованих нелінійних систем.

Структурну схему системи після гармонічної лінеаризації можна подати у вигляді, зображеному на рис 1.62, а, де $q_{Г.ЗВ}(\alpha) = q_G(\alpha) / k_H$ – зведений нормований коефіцієнт гармонічної лінеаризації; α – відносна амплітуда помилки у перехідному процесі; $W_{Л.ЗВ}(p) = k_H W_L(p)$ – передатна функція зведеної лінійної частини; k_H – коефіцієнт нормування гармонічно лінеаризованої нелінійної ланки.

Припустимо, що статична характеристика нелінійної ланки має вигляд, поданий на рис 1.62, б. Для цієї ланки коефіцієнти гармонічної лінеаризації визначаються такими залежностями:

$$\begin{aligned} q_G(\alpha) &= k_H q_{Г.ЗВ}(\alpha); k_H = k_1; \alpha = |\Delta x| / \Delta x_{\text{доп}}; \\ q_{Г.ЗВ}(\alpha) &= 1 \text{ при } \alpha \leq 1; \\ q_{Г.ЗВ}(\alpha) &= k_2 / k_1 - \frac{2}{\pi} (k_2 / k_1 - 1) \arcsin \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha^2} \right) \text{ при } \alpha \geq 1. \end{aligned} \quad (1.120)$$

Для збереження точності роботи системи в усталеному режимі статичну характеристику нелінійної ланки при відхиленнях вихідної величини, що за модулем не перевищують $\Delta x_{\text{доп}}$, зберігаємо лінійною з коефіцієнтом передачі

$$q_G(\alpha) = k_H q_{Г.ЗВ}(\alpha) = k_1 = 1.$$

При відхиленнях вихідної величини, що за модулем перевищують $\Delta x_{\text{доп}}$, коефіцієнт передачі нелінійної ланки зростає згідно з виразом (1.120) і

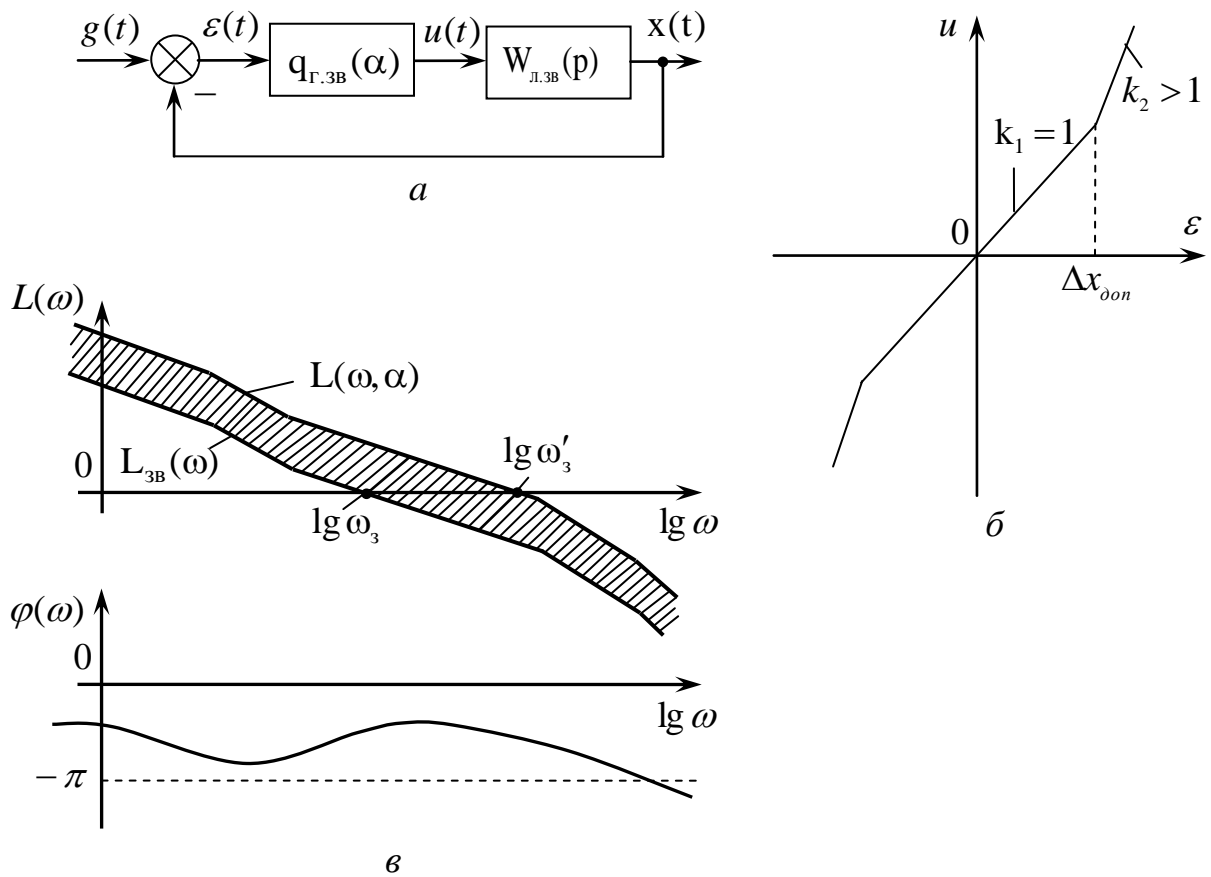


Рис. 1. 62. Схема системи з нелінійним коефіцієнтом передачі: а – схема гармонічно лінеаризованої САК; б – залежність коефіцієнта передачі від помилки; в – логарифмічні частотні характеристики САК

прямує до k_2/k_1 . ЛАХ гармонічно лінеаризованої розімкнутої системи

$$L(\omega, \alpha) = L_{ЗВ}(\omega) + L_{ЗВ}(\alpha),$$

де $L_{ЗВ}(\omega)$ – ЛАХ зведеної лінійної частини; $L_{ЗВ}(\alpha)$ – ЛАХ зведеної коригувальної нелінійної ланки. ЛАХ $L_{ЗВ}(\omega) = 20 \lg |W_{Л.ЗВ}(j\omega)|$ залишається незмінною при будь-яких відхиленнях керованої величини, для яких справджується нерівність $|\Delta x| \leq \Delta x_{доп}$, оскільки $k_{\Gamma}(\alpha) = 1 = \text{const}$. ЛАХ $L_{ЗВ}(\alpha)$ змінюється залежно від змінювання відносної амплітуди α під час перехідного процесу, тобто $L(\omega, \alpha)$ може розташовуватися у заштрихованій зоні на рис. 1.64, в, яка зверху обмежується ЛАХ, що відповідає максимально можливому значенню α . Частота зрізу при цьому може бути в межах $\omega_3 \leq \omega \leq \omega'_3$.

Збільшення частоти зрізу спричинює підвищення швидкодії. Водночас

через те, що $q_r(\alpha)$ для однозначних нелінійностей є дійсною величиною, нелінійна коригувальна ланка не впливає на ЛФХ системи. Тому при збільшенні ω_3 зменшуватиметься запас стійкості за фазою і зростатиме коливальність та перерегулювання перехідних процесів. Це обмежує допустиме нелінійне зростання коефіцієнта передачі.

Для ознайомлення з методикою розрахунку максимального значення коефіцієнта k_2 , при якому показник коливальності не перевищує допустимого значення, можна звернутися до [1].

Варто зазначити, що підвищення швидкодії можливе тільки при використанні нелінійностей, для яких $q_{г.зв}(\alpha) > 1$ при відхиленнях вихідної величини, що виходять за межі допустимої усталеної помилки.

Крім розглянутої нелінійної ланки з коефіцієнтами $k_1 = 1$ і $k_2 > k_1$ можна використовувати ланки зі степеневими статичними характеристиками, наприклад $u = k\varepsilon^2$, $u = k\varepsilon^3$ та ін.

1.9.2 Псевдолінійні коригувальні пристрої

Нелінійні коригувальні пристрої, еквівалентні АФХ яких не залежать від амплітуди вхідного сигналу, а є функціями тільки частоти, називаються *псевдолінійними*. Особливістю цих пристроїв є відсутність жорсткого зв'язку між амплітудною і фазовою характеристиками, що дає змогу формувати ці характеристики незалежно. Це, в свою чергу, відкриває широкі можливості корекції САК за рахунок змінювання її частотних характеристик у бажаному напрямі.

Одну з можливих структурних схем псевдолінійного коригувального пристрою зображено на рис. 1.63. Вона складається з двох каналів. Верхній (амплітудний) канал призначений для формування амплітудної

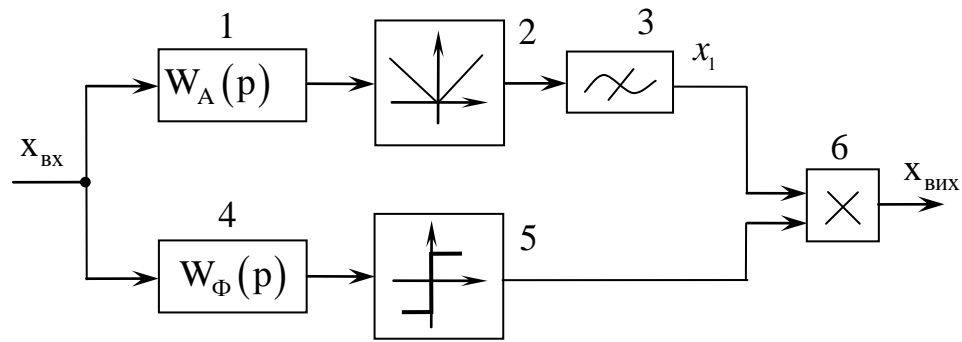


Рис. 1.63. Схема псевдолінійного коригувального пристрою

характеристики. Він включає лінійний елемент 1 з передатною функцією $W_A(p)$, ланку 2, що виділяє модуль сигналу (в електричних схемах це звичайно двопівперіодний випрямляч), і фільтр 3. Амплітуда сигналу на виході ланки $W_A(p)$ визначається її амплітудною частотною характеристикою. Цей сигнал випрямляється та фільтрується і таким чином виключається інформація про фазу сигналу. Отже, на вході блока множення 6 формується випрямлений сигнал x_1 , величина якого визначається амплітудною частотною характеристикою ланки $W_A(p)$.

Нижній (фазовий) канал формує фазову характеристику. Він складається з лінійної ланки 4 з передатною функцією $W_Ф(p)$ та ідеального релейного елемента 5. Фаза сигналу на виході ланки 4 визначається її фазовою частотною характеристикою. Релейний елемент 5 перемикається при переході сигналу через нуль, тобто він реагує на фазу сигналу. Амплітуда сигналу на виході реле 5 не залежить від амплітуди вхідного сигналу, тому що може мати лише два фіксованих рівні.

Вихідний сигнал коригувального пристрою $x_{\text{вих}}$ утворюється в результаті перемножування вихідних сигналів амплітудного і фазового каналів. Якщо вибрати лінійні ланки з відповідними передатними функціями $W_A(p)$ і $W_Ф(p)$, то можна реалізувати коригувальний пристрій з бажаними амплітудною і фазовою характеристиками, які можна змінювати незалежно одну від одної. Наприклад, якщо необхідно знизити амплітуду на високих частотах і

одночасно створити випередження за фазою, то в амплітудний канал слід ввести ланку, що ослаблює високі частоти, наприклад аперіодичну з передатною функцією

$$W_A(p) = \frac{k}{Tp + 1},$$

а у фазовий канал – елемент, що створює випередження за фазою, наприклад, інтегрувально-диференціювальну з передатною функцією

$$W_\Phi(p) = \frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1},$$

де $T_1 > T_2$.

1.9.3 Нелінійні коригувальні пристрої з додатним гістерезисом

Цікаві можливості корекції динамічних властивостей САК відкриває застосування штучно створених нелінійних ланок з додатним гістерезисом (з двозначними випереджуючими статичними характеристиками). На відміну від нелінійностей з від'ємним гістерезисом у гармонічній передатній функції

$$W_{\text{нл}}(p) = q_\Gamma(p) + \frac{q'_\Gamma}{\omega} p.$$

коефіцієнт гармонічної лінеаризації q'_Γ завжди додатний, тобто він визначає складову, що випереджує за фазою вхідний сигнал на кут $\pi/2$. Це пояснюється тим, що при зростанні вхідної величини ($d\varepsilon/dt > 0$) вихідна величина змінюється відповідно до лівої вітки статичної характеристики нелінійної ланки, а при зменшенні ($d\varepsilon/dt < 0$) – відповідно до правої вітки (рис. 1.64). Запишемо коефіцієнти гармонічної лінеаризації такої ланки (при $a > c$)

$$q_\Gamma = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}};$$

$$q'_\Gamma = 4bc / \pi a^2$$

і гармонічну передатну функцію

$$W_{\text{нл}}(p) = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} + \frac{4bc}{\pi a^2} \frac{p}{\omega}$$

або

$$W_{\text{нл}}(j\omega) = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} + j \frac{4bc}{\pi a^2}.$$

Амплітудна характеристика цієї ланки

$$|W_{\text{нл}}(j\omega)| = 4c/\pi a$$

не залежить від частоти вхідного сигналу, а є функцією тільки його амплітуди.

Фазова характеристика ланки

$$\varphi_{\text{нл}}(a) = \arctg \sqrt{\frac{b^2}{a^2 - b^2}},$$

тобто релейний елемент з додатним гістерезисом створює випередження за фазою на всіх частотах, яке зменшується при зростанні амплітуди a . Якщо вибрати ширину петлі гістерезису $2b$, яка дорівнює двом амплітудам $2a$, то ланка буде створювати випередження за фазою $\pi/2$ при будь-яких частотах.

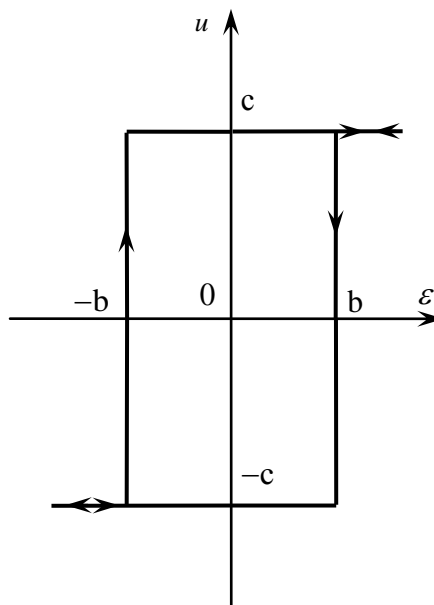


Рис. 1.64. Характеристика реле з додатним гістерезисом

тобто релейний елемент з додатним гістерезисом створює випередження за фазою на всіх частотах, яке зменшується при зростанні амплітуди a . Якщо

вибрати ширину петлі гістерезису $2b$, яка дорівнює двом амплітудам $2a$, то ланка буде створювати випередження за фазою $\pi/2$ при будь-яких частотах.

Отже, нелінійні ланки з додатним гістерезисом є еквівалентними диференціювальним лінійним ланкам. Їх можна застосовувати для коригування динамічних властивостей систем за рахунок введення похідної.

Література: [1, с. 481-486].

СРС: Задачі для самостійного розв'язання: Задача 2 [5, с. 33].

Література: [5, с. 29-33].

Контрольні запитання:

1. Наведіть приклади нелінійного коригування САК.
2. Яким є характерний недолік застосування нелінійних коригувальних ланок?
3. Які показники якості керування можна поліпшити за допомогою ланки з нелінійно змінюваним коефіцієнтом передачі?
4. У чому полягає особливість псевдолінійних коригувальних пристроїв?
5. Чим відрізняються передатні функції гармонічно лінеаризованих релейних ланок з додатним та від'ємним гістерезисом?
6. За яких умов релейна ланка з додатним гістерезисом створюватиме випередження за фазою рівне 90° при довільних частотах?

Тема 1.10 Компенсування шкідливого впливу нелінійностей

Нелінійні ланки можуть погіршувати якість систем, зокрема спричинювати низькочастотні коливання з великою амплітудою. Корекція систем у таких випадках може бути здійснена за рахунок компенсування небажаних нелінійностей.

1.10.1 Застосування компенсувальних нелінійностей

Одним із способів компенсації нелінійних статичних характеристик є вмикання нелінійної ланки, яка має спеціально підібрану характеристику, поспідовно (рис. 1.65, а) або паралельно з нелінійністю, що компенсується (рис. 1.65, б), також у вигляді зворотного зв'язку (рис. 1.65, в).

Мета компенсації полягає у визначенні такої статичної характеристики нелінійної компенсувальної ланки φ_k , щоб сукупна статична характеристика вихідної ланки φ_1 і компенсувальної φ_k була лінійною φ_d .

Розглянемо спочатку послідовне з'єднання компенсувальної нелінійності, яка має статичну характеристику

$$x_3 = \varphi_k(x_2) \quad (1.121)$$

і нелінійної ланки, статична характеристика якої

$$x_2 = \varphi_1(x_1) \quad (1.122)$$

відома.

Сукупна статична характеристика двох ланок має бути лінійною:

$$x_3 = \varphi_d(x_1) = k_0 x_1 \quad (1.123)$$

де $k_0 = \text{const}$.

Якщо нелінійність $\varphi_1(x_1)$ задано аналітично, то для визначення $\varphi_k(x_2)$

необхідно розв'язати нелінійне рівняння (1.122) відносно x_1 , тобто знайти зворотну нелінійну функцію $x_1 = \varphi_1^{-1}(x_2)$ і підставити її значення в умову лінійності (1.123):

$$x_3 = k_0 x_1 = k_0 \varphi_1^{-1}(x_2) \quad (1.124)$$

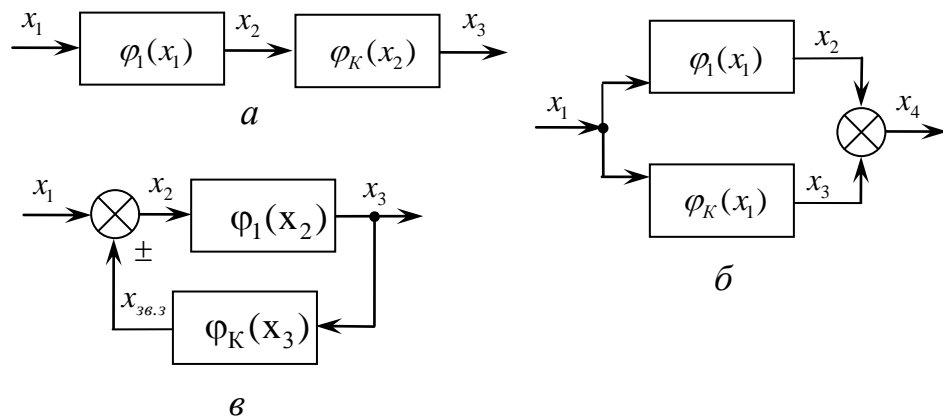


Рис. 1.65. Схеми з'єднання компенсувальних ланок з нелінійностями: а – послідовно; б – паралельно; в – у вигляді зворотного зв'язку

З порівняння виразів (1.121) і (1.124) видно, що статичну характеристику компенсувальної нелінійної ланки можна записати в аналітичному вигляді

$$\varphi_K(x_2) = k_0 \varphi_1^{-1}(x_2).$$

Якщо статичну характеристику $\varphi_1(x_1)$ не задано аналітично, то характеристику $\varphi_K(x_2)$ можна визначити графічно. Припустимо, що характеристика $x_2 = \varphi_1(x_1)$ має вигляд, зображений на рис. 1.66, а. Тут же наведено бажану лінійну характеристику $x_3 = \varphi_K(x_1)$. Масштаби величин x_1, x_2, x_3 мають бути однаковими.

Характеристика $\varphi_K(x_2)$ компенсувальної нелінійності будується таким чином. Беруть довільне значення x'_1 і за характеристиками $\varphi_1(x_1)$ і $\varphi_K(x_1)$ знаходять відповідні значення x'_2 і x'_3 . Ці значення визначають точку статичної характеристики $x_3 = \varphi_K(x_2)$ в системі координат (x_2, x_3) на рис. 1.66, б. Якщо вибрати невеликий крок змінювання x_1 , можна досить точно побуду-

вати шукану характеристику $\varphi_K(x_2)$.

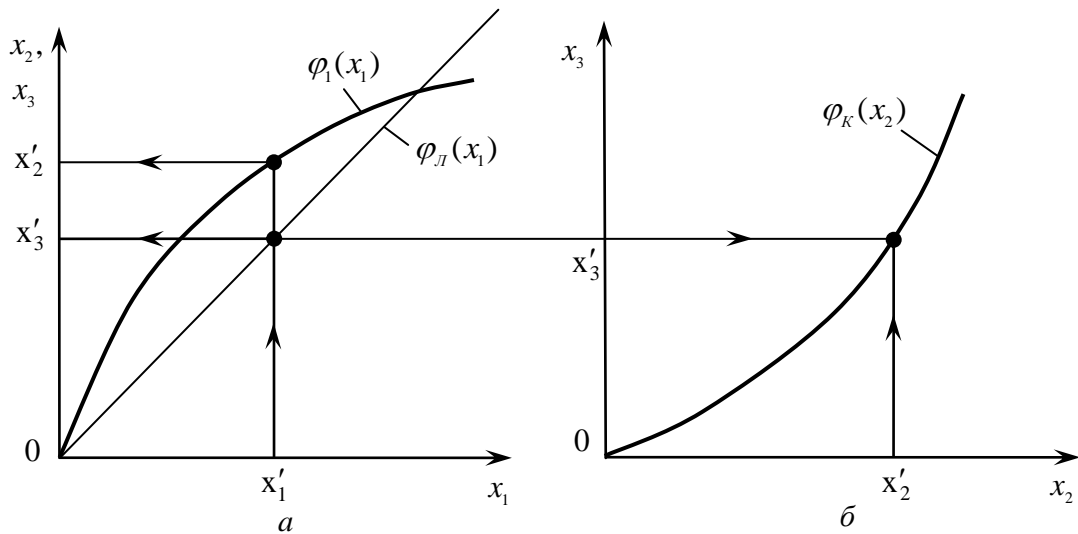


Рис. 1.66. Графічна побудова компенсувальної нелінійності: а – нелінійність, що компенсується; б – компенсувальна нелінійність

При виборі способу компенсації слід мати на увазі, що не всяку нелінійність можна компенсувати за рахунок послідовного вмикання коригувальної ланки. Компенсація можлива лише в тому разі, коли компенсована нелінійність має взаємно однозначну відповідність значень вхідної і вихідної величин. Наприклад, для статичної характеристики з насиченням (рис. 1.67) немає однозначної зворотної функції $x_1 = \varphi^{-1}(x_2)$ при $x_2 = x_{2\max}$ і вона взагалі не існує при $x_2 > x_{2\max}$.

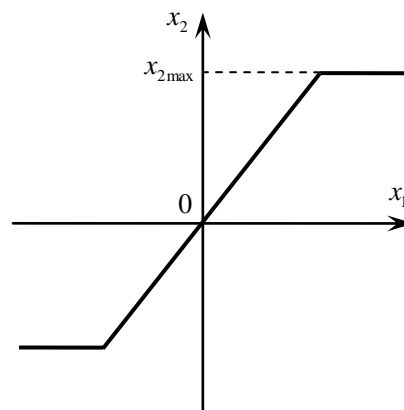


Рис. 1.67. Приклад нелінійності, що немає однозначної зворотної функції

Не мають однозначної відповідності зворотні функції також для характеристик із зоною нечутливості, всіх релейних і будь-яких неоднозначних

характеристик. Нелінійності з такими статичними характеристиками не можна компенсувати за рахунок послідовних компенсувальних нелінійностей.

Ширші можливості дає паралельне введення компенсувальних нелінійностей (рис. 1.65, б). Умова лінійності сукупної характеристики має вигляд

$$x_4 = x_2 + x_3 = \varphi_1(x_1) + \varphi_k(x_1) = \varphi_l(x_1) = k_0 x_1,$$

звідки

$$\varphi_k(x_1) = \varphi_l(x_1) - \varphi_1(x_1). \quad (1.125)$$

Отже, для визначення характеристики $\varphi_k(x_1)$ досить відняти характеристику нелінійності, що компенсується, від бажаної характеристики лінійної ланки $\varphi_l(x_1)$. Це можна зробити аналітично або графічно. На рис 1.68, а показано побудову характеристики $\varphi_k(x_1)$, що компенсує нелінійність $\varphi_1(x_1)$ із зоною нечутливості. Для будь-яких x_1 виконується умова $x_2 + x_3 = x_4$.

Компенсацію небажаної нелінійності можна також здійснити за рахунок нелінійних жорстких додатних або від'ємних зворотних зв'язків (рис. 1.68, в).

Статичну характеристику $x_{зв.3} = \varphi_k(x_3)$ можна визначити таким чином. Відповідно до структурної схеми, наведеної на рис 1.68, в, маємо

$$x_3 = \varphi_1(x_2) = \varphi_1(x_1 \pm x_{зв.3}), \quad (1.126)$$

але

$$x_{зв.3} = \varphi_k(x_3), \quad (1.127)$$

тому

$$x_3 = \varphi_1[x_1 \pm \varphi_k(x_3)] \quad (1.128)$$

Розв'язавши нелінійне рівняння (1.128) відносно аргументу, визначимо зворотну функцію

$$x_1 \pm \varphi_k(x_3) = \varphi_1^{-1}(x_3), \quad (1.129)$$

звідки

$$x_1 = \varphi_1^{-1}(x_3) \mp \varphi_k(x_3). \quad (1.130)$$

Прийнявши рівняння бажаної лінійної характеристики у вигляді

$$x_3 = \varphi_L(x_1) = k_0 x_1 \quad (1.131)$$

і підставивши значення $x_1 = x_3/k_0$ в (1.130), дістанемо

$$x_3/k_0 = \varphi_1^{-1}(x_3) \mp \varphi_k(x_3),$$

звідки знайдемо статичну характеристику компенсуючої нелінійності

$$\varphi_k(x_3) = \pm \varphi_1^{-1}(x_3) \mp x_3/k_0. \quad (1.132)$$

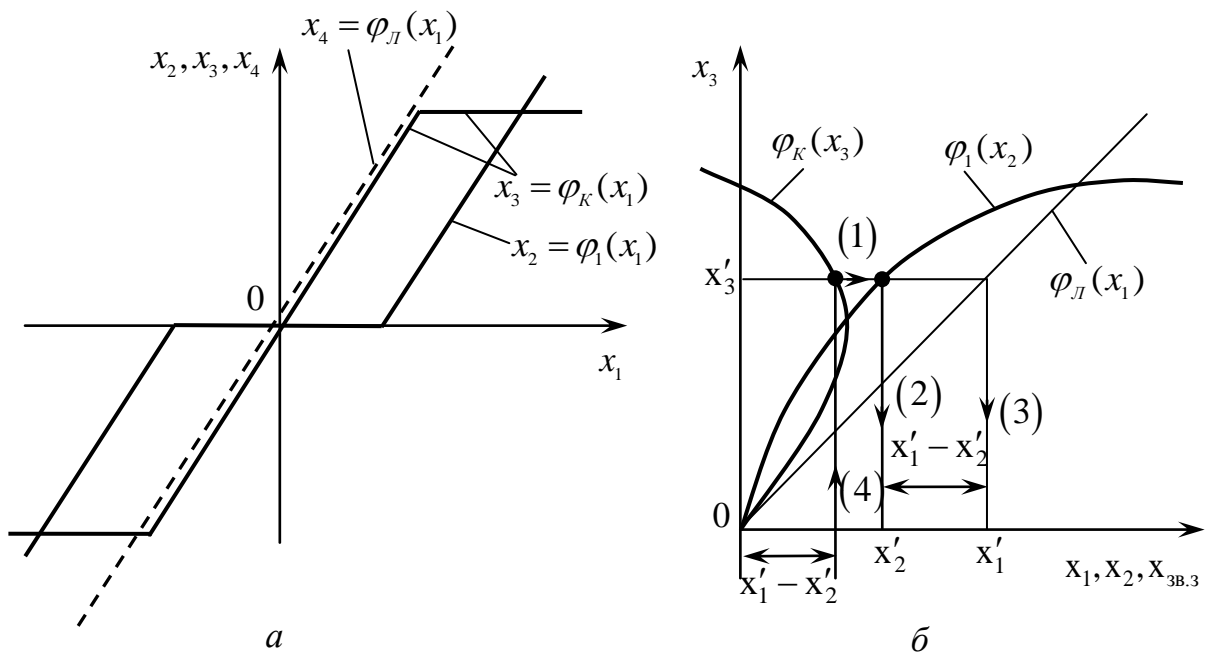


Рис. 1.68. Побудова характеристик компенсуючих нелінійностей: а – за паралельного з'єднання ланок; б – за введення ланки у зворотний зв'язок

У формулі (1.132) верхні знаки відповідають додатному зворотному зв'язку, а нижні – від'ємному.

Компенсація за рахунок зворотного зв'язку можлива при таких самих вимогах до статичної характеристики нелінійності, що компенсується, відносно взаємно однозначної відповідності значень вхідної і вихідної величин, як і при компенсації послідовною коригувальною ланкою.

Статичну характеристику $\varphi_k(x_3)$ можна визначити аналітично за формулою (1.132) або побудувати графічно.

Методика графічної побудови характеристики $\varphi_k(x_3)$ нелінійної ланки, що використовується у від'ємному зворотному зв'язку, ілюструється рис. 1.68, б. Послідовність побудови однієї точки шуканої характеристики подано цифрами у дужках і стрілками. Для вибраного значення x'_3 за характеристиками $\varphi_1(x_2)$ і $\varphi_{\text{л}}(x_1)$, знаходимо значення x'_2 і x'_1 , потім визначаємо $x'_{\text{зв.з}} = x'_1 - x'_2$ і знаходимо точку характеристики $x_{\text{зв.з}} = \varphi_k(x_3)$. Приймаючи ряд значень x_3 , визначаємо інші точки характеристики $\varphi_k(x_3)$ і будуємо її.

Якщо нелінійність φ_n зумовлена характеристикою об'єкта керування, то вмикати компенсуювальну нелінійність розглянутими способами зазвичай неможливо. У цьому разі використовується модель об'єкта. Лінеаризація системи здійснюється за рахунок вмикання паралельно з об'єктом компенсуювальної нелінійності φ_k і ланки $W_{\text{м.о}}(p)$, що є моделлю лінійної частини об'єкта $W_o(p)$ (рис. 1.69, а). Нелінійність об'єкта можна також компенсувати за

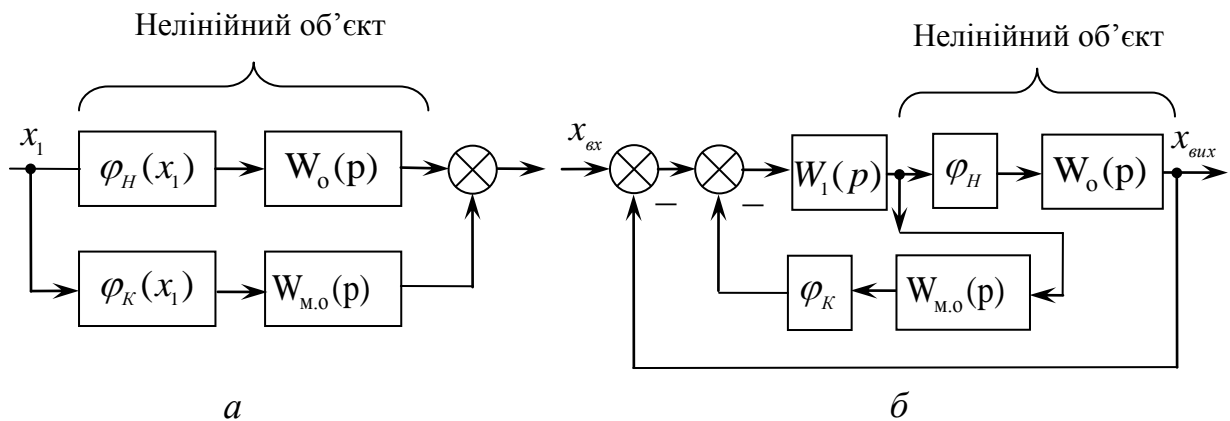


Рис. 1.69. Лінеаризація об'єкта керування за допомогою компенсуювальної нелінійності: а – паралельне вмикання; б – використання зворотного зв'язку

допомогою від'ємного зворотного зв'язку, що охоплює попередні лінійні елементи $W_1(p)$ і становить модель компенсуювальної нелінійності φ_k та об'єкта $W_{\text{м.о}}(p)$ (рис. 1.69, б).

Література: [1, с. 486-491].

СРС: Задачі для самостійного розв'язання: Задача 3 [5, с. 33].

Література: [5, с. 29-33].

Контрольні запитання:

1. Назвіть способи вмикання компенсувальних ланок для лінеаризації статичних нелінійностей.
2. Якого типу нелінійності можна лінеаризувати шляхом послідовного вмикання компенсувальних ланок?
3. Викладіть методику графічної побудови характеристики компенсувальної ланки у від'ємному зворотному зв'язку.
4. Як здійснюється лінеаризація об'єкта керування при паралельному вмиканні компенсувальної ланки?
5. Як виконується лінеаризація об'єкта керування при вмиканні компенсувальної ланки у зворотного зв'язку?

1.10.2 Вібраційне компенсування нелінійностей

Ефективним способом придушення низькочастотних автоколивань у нелінійних системах є вібраційна лінеаризація. Ідея вібраційної лінеаризації полягає у створенні високочастотних коливальних сигналів на вході нелінійної ланки. Дана лінеаризація є найбільш поширеним способом лінеаризації релейних систем.

Суть вібраційної лінеаризації можна пояснити так. Нехай на вхід нелінійної ланки (рис. 1.70, а) подається сигнал $x_0(t)$, що повільно змінюється, і високочастотний компенсуючий сигнал $x_{\sim}(t)$ з нульовим середнім значенням. Частота f_1 сигналу $x_{\sim}(t)$ повинна бути досить високою, щоб функцію $x_0(t)$ вважати сталою протягом періоду $T_1 = 1/f_1$.

Сигнал на вході нелінійної ланки обчислюється за формулою

$$\varepsilon(t) = x_0(t) + x_{\sim}(t).$$

Вихідний сигнал $x(t)$ нелінійної ланки можна подати у вигляді суми середньої складової $x_{\text{сеп}}(x_0)$, що повільно змінюється, і високочастотної коливної функції $\varphi_1(x_{\sim})$, тобто

$$x(t) = \varphi[x_0(t) + x_{\sim}(t)] = x_{\text{сеп}}(x_0) + \varphi_1(x_{\sim}). \quad (1.133)$$

Процес вібраційної лінеаризації ілюструється графіками на рис. 1.70, б. Тут показано побудову вихідного сигналу $x(t)$ нелінійного елемента, що має характеристику ідеального реле $x(t) = \varphi(t)$, при подаванні на його вхід високочастотного сигналу $x_{\sim}(t)$ і суми двох сигналів $x_{\sim}(t)$ і $x_0(t)$ за умови, що протягом кількох періодів коливальних сигналів $x_{\sim}(t)$ сигнал $x_0(t)$ сталий.

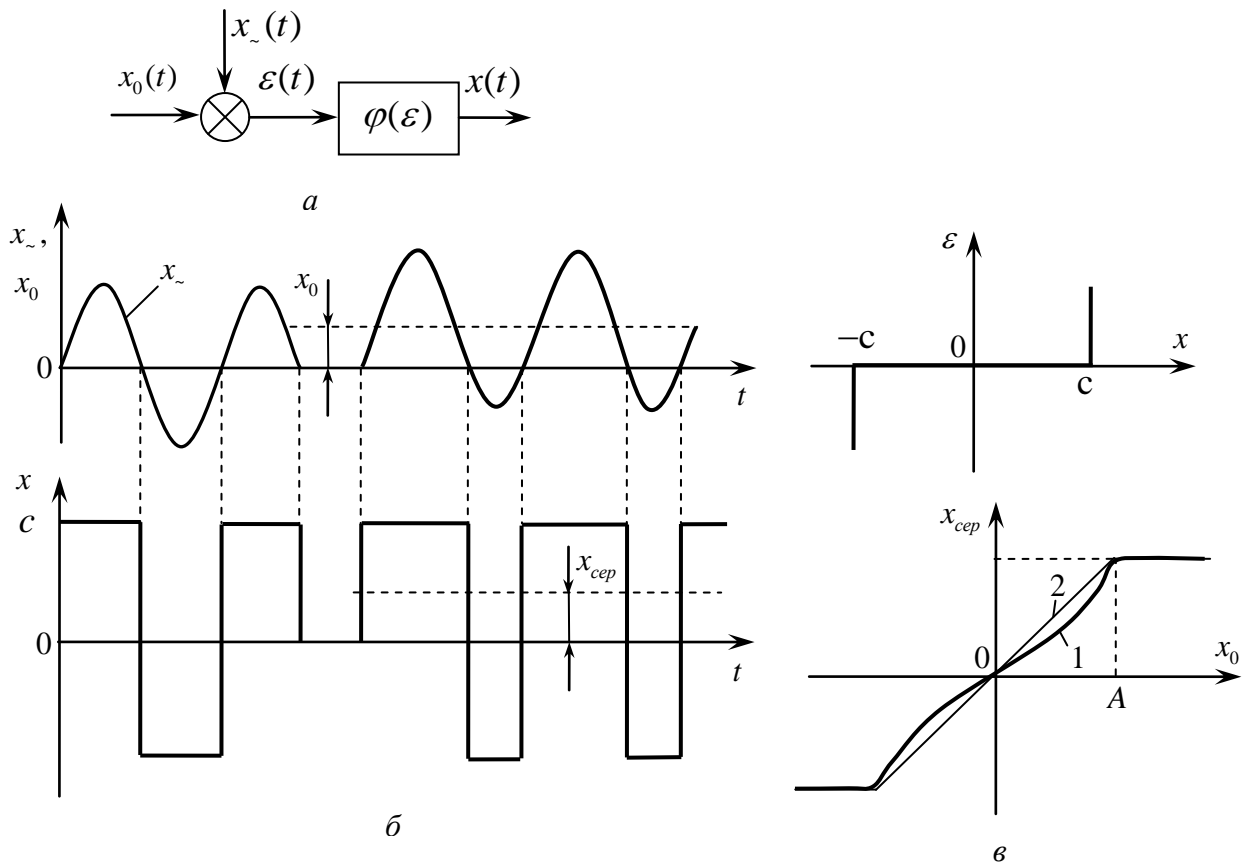


Рис. 1.70. Процес вібраційної лінеаризації: а – схема ланки із суматором сигналів; б – проходження сигналу через ланку; в – графіки $x_{\text{сер}}(x_0)$

При $x_0 = \text{const}$ середнє значення $x_{\text{сер}}$ вихідного сигналу нелінійного елемента за період T_1 високочастотного компенсувального сигналу обчислюється так:

$$x_{\text{сер}} = \frac{1}{T_1} \int_{t-T_{1/2}}^{t+T_{1/2}} \varphi[x_0(t) + x_{\sim}(t)] dt.$$

Підінтегральна функція являє собою прямокутні коливання, симетричні при $x_0 = 0$ і несиметричні при $x_0 \neq 0$. При $x_0 = 0$ середнє значення вихідного сигналу $x_{\text{сер}}$ дорівнює нулю.

Визначимо $x_{\text{сер}}$ за умови, що компенсувальний сигнал синусоїдний $x_{\sim}(t) = A \sin \omega t$ і $x_0 = \text{const}$ (рис. 1.71, а) реле перемикається при $x_{\sim}(t) + x_0 = 0$, тобто при

$$\omega_1 t = -\arcsin(x_0 / A);$$

$$\omega_2 t = \pi + \arcsin(x_0 / A);$$

$$\omega_3 t = 2\pi - \arcsin(x_0 / A).$$

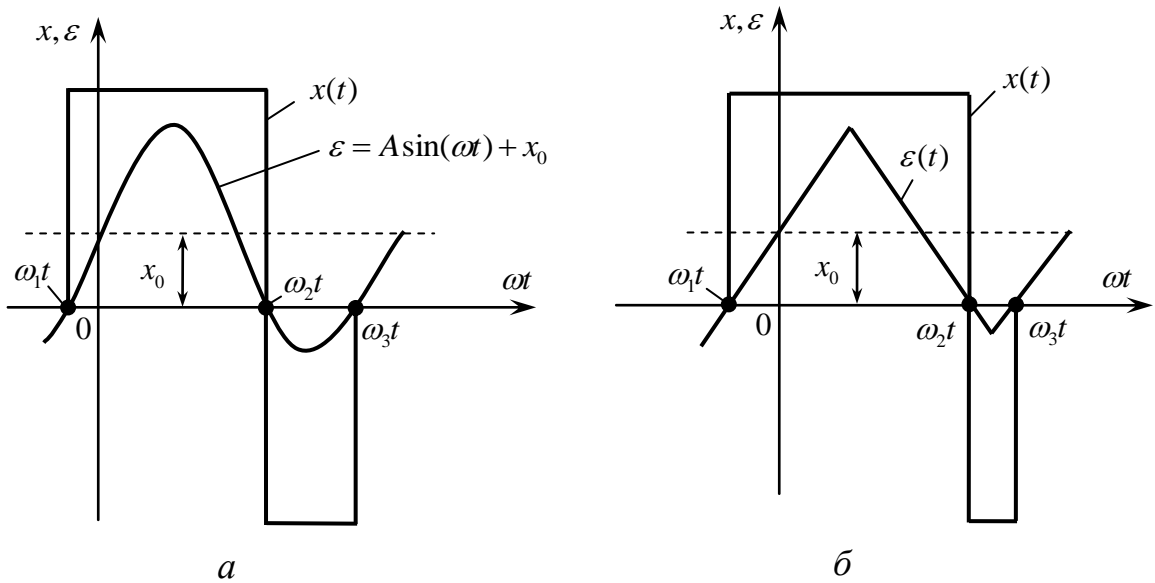


Рис. 1.71. Визначення $x_{\text{сер}}$ для синусоїдного (а) та трикутного (б) компенсувальних сигналів

Знайдемо середнє значення за період

$$x_{\text{сер}} = \frac{(\omega_2 t - \omega_1 t)c - (\omega_3 t - \omega_2 t)c}{2\pi} = \frac{2c \arcsin(x_0 / A)}{\pi} \approx k_{\varphi} x_0.$$

Розглянемо тепер випадок, коли компенсувальний сигнал має вигляд трикутних імпульсів з такою самою амплітудою A і частотою ω , що й розглянутий синусоїдальний сигнал (рис. 1.71, б). Тоді при зростанні сигналу

$$x_{\sim}(t) = \frac{2A}{\pi} \omega t$$

і при його спаданні

$$x_{\sim}(t) = -\frac{2A}{\pi} \omega t.$$

Визначимо моменти перемикання реле з умови $x_{\sim}(t) + x_0 = 0$:

$$\omega_1 t = -x_0 \pi / 2A;$$

$$\omega_2 t = x_0 \pi / 2A + \pi;$$

$$\omega_3 t = -x_0 \pi / 2A + 2\pi.$$

Середнє значення за період становить

$$x_{\text{сер}} = cx_0 / A = k_{\varphi} x_0 .$$

Графіки залежностей $x_{\text{сер}}(x_0)$ для синусоїдного (крива 1) і трикутного (крива 2) компенсувальних сигналів зображено на рис. 1.70, в. З цих графіків видно, що для трикутного компенсувального сигналу $x_{\text{сер}}$ є лінійною функцією x_0 при $|x_0| \leq A$. Для синусоїдного сигналу функцію $x_{\text{сер}}(x_0)$ з певним наближенням також можна вважати лінійною при $|x_0| \leq A$.

Лінійність зберігається в межах амплітуди A компенсувального сигналу. Отже, при збільшенні амплітуди A розширюється зона лінійності релейного елемента, однак при цьому зменшується коефіцієнт підсилення k_{φ} лінеаризованого елемента.

Вихідний сигнал нелінійного елемента, як видно з формули (1.133), має дві складові і подається на вхід лінійної частини системи. При досить великій частоті компенсувального сигналу лінійна частина системи внаслідок своєї інерційності практично не пропускає сигнал $\varphi_1(x_0)$, тобто в результаті вібраційної лінеаризації релейний елемент можна розглядати як лінійну ланку з коефіцієнтом передачі k_{φ} .

Для того щоб дістати високочастотні коливання, що здійснюють вібраційну лінеаризацію, можна використовувати зовнішній генератор періодичних коливань. Крім того, можливе використання і власних коливань (автоколивання) системи. У цьому разі необхідно вжити спеціальних заходів для підвищення частоти автоколивань, зокрема перейти до ковзного режиму.

Одним із способів створення автоколивального контуру є використання місцевого зворотного зв'язку. Наприклад, релейна ланка охоплюється від'ємним інерційним зворотним зв'язком, як показано на рис. 1.72.

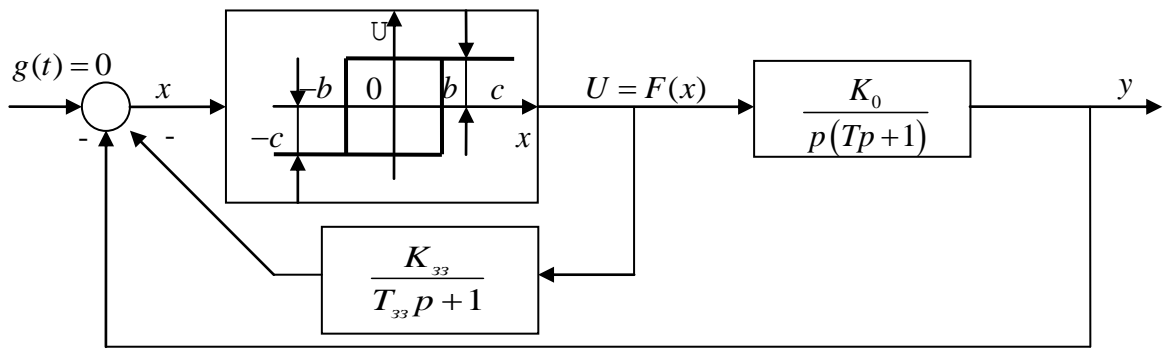


Рис. 1.72. Систем з вібраційною лінеаризацією релейної ланки шляхом утворення внутрішнього автоколивального контуру

У внутрішньому контурі виникає режим симетричних автоколивань з відповідною частотою і амплітудою, котрий виконує вібраційне згладжування нелінійності. Зовнішній контур у цьому разі можна вже розглядати як лінійний у котрому гістерезисна ланка замінюється лінійною з коефіцієнтом підсилення

$$K_H = \frac{2c}{\pi \sqrt{a_a^2 - b^2}}.$$

При цьому амплітуда автоколивань a_a повинна бути більшою від максимального значення сигналу x_0 для котрого треба забезпечити лінійність характеристики. Наприклад, для гістерезисної релейної характеристики має бути

$$a_a \geq b + |x_0|.$$

Перевагами використання зовнішнього генератора є можливість досить простими засобами змінювати частоту і амплітуду коливань у широких межах, а недоліком – ускладнення за рахунок додаткового вузла (генератора).

Вібраційну лінеаризацію можна також розглядати як процес *широкоімпульсної модуляції*, причому релейний елемент є модулятором, $x_0(t)$ – сигналом несучої частоти, $x_a(t)$ – модулювальним сигналом. Отже, для процесу вібраційної лінеаризації буде справедливою відома умова неспотвореної передачі низькочастотного сигналу релейним елементом

$$f_{\sim}/f_0 \geq 3,$$

де f_{\sim} і f_0 – частоти відповідно коригувального та вхідного сигналів.

За допомогою викладеного способу можна виконувати вібраційну лінеаризацію для широкого класу нелінійних ланок (трипозиційної релейної характеристики, характеристики з зоною нечутливості, характеристики з насиченням тощо)

Література: [1, с. 491-494].

СРС: Діаграми якості нелінійних систем автоматичного регулювання.

Література: [1, с. 461-465].

Контрольні запитання:

1. У чому полягає ідея вібраційної лінеаризації нелінійних ланок?
2. Поясніть сутність вібраційної лінеаризації на прикладі ланки типу ідеальне двопозиційне реле.
3. Синусоїдна чи трикутна форма компенсувального сигналу дозволяє здійснити якіснішу вібраційну лінеаризацію релейної ланки?
4. Яким чином можна розширити лінійну зону передачі сигналу релейної ланки з вібраційною лінеаризацією?
5. Назвіть та порівняйте способи отримання високочастотних коливань для вібраційної лінеаризації нелінійних ланок.
6. Якою є умова неспотвореної передачі сигналу релейним елементом з вібраційною лінеаризацією?

РОЗДІЛ 2 ДИСКРЕТНІ СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

Тема 2.1 Дискретні САК та їх основні особливості

2.1.1 Визначення дискретної САК

Розглянуті раніше САК характеризуються тим, що всі процеси, які в них проходять, носять безперервний характер за часом. Хоча на сьогодні поряд з неперервними або аналоговими системами широко використовуються дискретні системи. *САК називається дискретною*, якщо вона має у своєму складі хоча б одну дискретну ланку або елемент. У свою чергу *дискретною називається ланка*, у якої вихідна величина змінюється дискретно, тобто стрибкоподібно, за дискретного чи неперервного характеру вхідної величини.

Зокрема, дискретний характер сигналів в САК спостерігається, якщо в контур керування введено цифровий обчислювальний пристрій (ЦОП), оскільки інформація на такі пристрої та з них поступає дискретно з інтервалом часу T_0 .

Структурна схема дискретної САК з реалізованим на основі ЦОП цифровим регулятором зображена на рис. 2.1, а, а графіки сигналів в різних точках цієї системи показані на рис. 2.1, б.

У дискретному елементі системи здійснюється перетворення вхідної безперервної величини на вихідну дискретну величину. Тобто відбувається так зване квантування вхідного сигналу, де під *квантуванням* мається на увазі процес перетворення неперервної інформації в дискретну. Розрізняють три види квантування сигналів: за рівнем, за часом, за рівнем і часом.

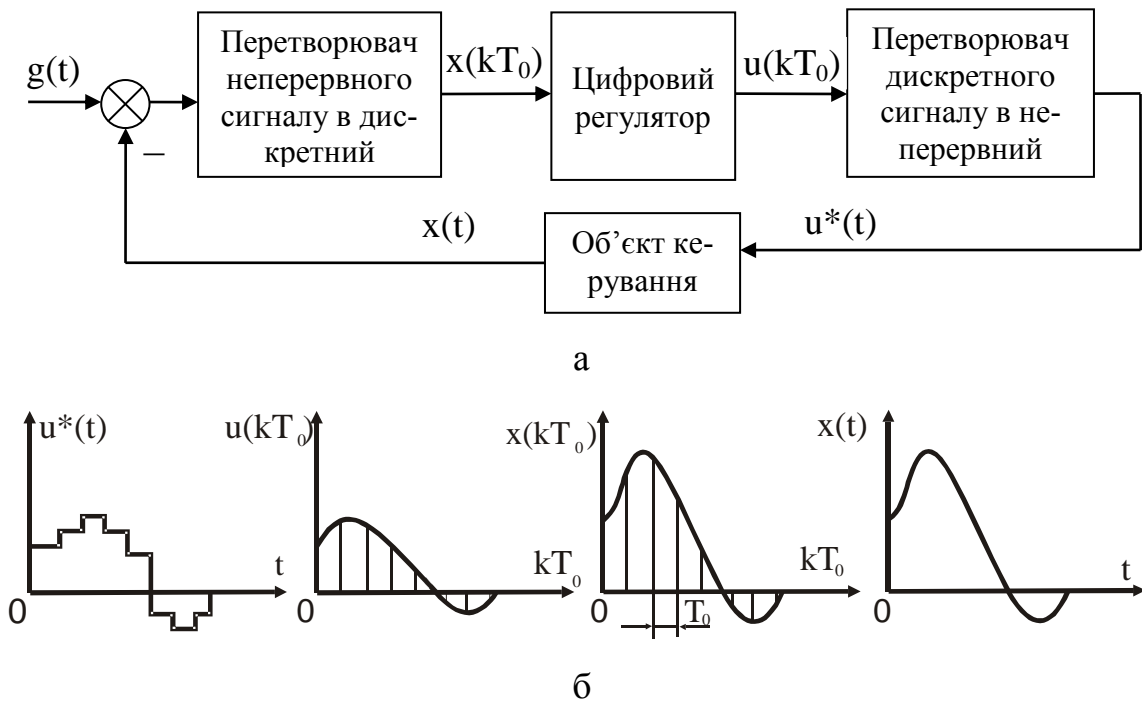


Рис. 2.1. Дискретна САК: а – узагальнена схема системи; б – графіки сигналів у різних точках системи

2.1.2 Типи квантування сигналів

Квантування за рівнем полягає у перетворенні неперервно змінюваної величини на східчасту з фіксованими дискретними значеннями, які часто виражаються цілими числами. При квантуванні за рівнем відбувається фіксація дискретних рівнів сигналу в будь-які моменти часу. Прикладом систем із даним квантуванням сигналів є релейні САК. На рис. 2.2, а показана п'ятипозиційна релейна характеристика $y = F(x)$ дискретного елемента, а на рис. 2.2, б демонструється процес квантування цим елементом сигналу $x(t)$. Важливо зазначити, що перетворення сигналу при його квантуванні за рівнем є нелінійним.

Квантування за часом полягає у фіксації будь-якого рівня неперервного сигналу в дискретні моменти часу t_1, t_2, \dots, t_n . Квантування за часом здійснюється імпульсним елементом і застосовується в імпульсних системах.

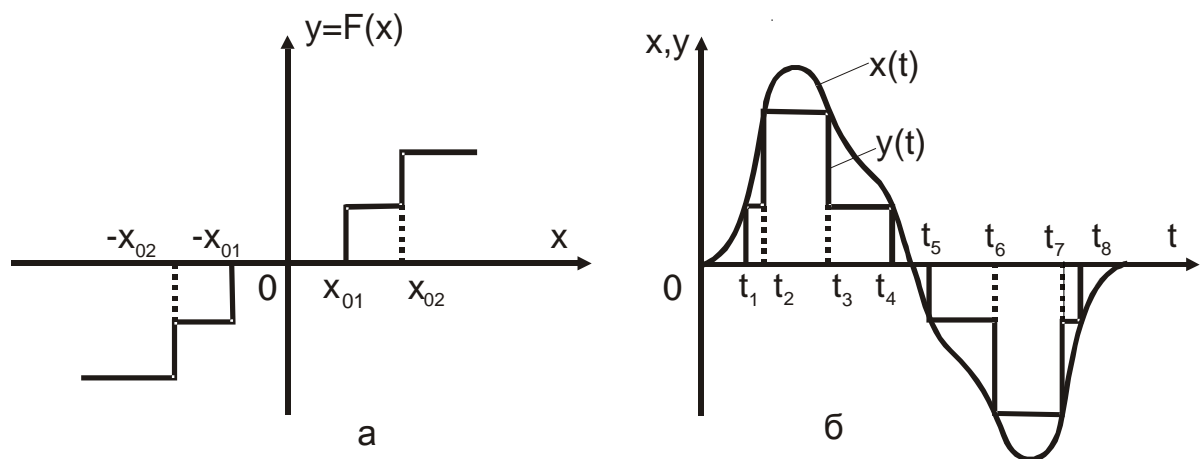


Рис. 2.2. Процес квантування за рівнем: а – релейна характеристика; вхідний $x(t)$ та квантований за рівнем $y(t)$ сигнали

Квантування за рівнем і часом полягає у фіксації дискретних рівнів сигналу в дискретні моменти часу. Таке квантування здійснюється кодоімпульсним модулятором або ЦОП. При цьому неперервна величина трансформується в цифрову. Системи, в яких здійснюється подібне квантування називаються *цифровими* або релейно-імпульсними.

На рис. 2.3 показані всі три типи процесу квантування: за рівнем (рис. 2.3, а), за часом (рис. 2.3, б), за рівнем і часом (рис. 2.3, в). Дискретні

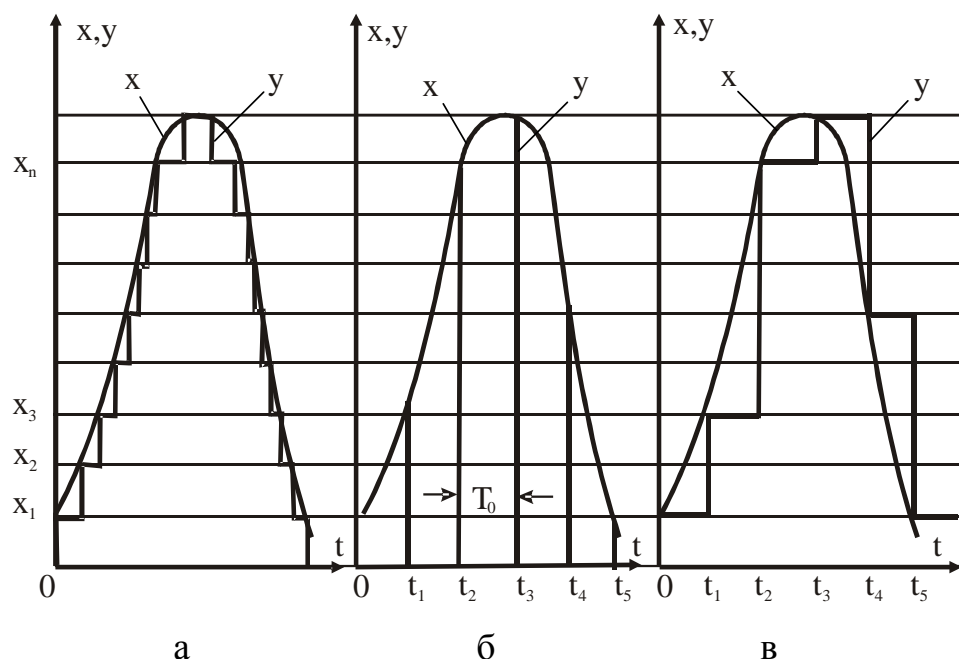


Рис. 2.3. Квантування сигналу: а – за рівнем; б – за часом; в – за рівнем і часом

системи, залежно від існуючих у них типів квантування сигналів, відповідно діляться на три типи: *релейні, імпульсні та цифрові*.

Релейні САК досліджувались вище в розділі нелінійних систем. Даний розділ дисципліни присвячений вивченню імпульсних і цифрових систем.

2.1.3 Імпульсні системи та їх класифікація

Імпульсна система – це система, в якій є імпульсний елемент, що здійснює квантування сигналу за часом.

Здійснюване імпульсним елементом або модулятором перетворення неперервного сигналу в послідовність імпульсів називається *імпульсною модуляцією*. Модуляція зводиться до зміни того чи іншого параметру імпульсів на виході, що називається модульованим параметром, у відповідності з сигналом на вході, що називається модулювальним. Параметри, що характеризують послідовність імпульсів, є такими: A – амплітуда імпульсу, T_0 – період повторення (такт квантування), γ – коефіцієнт заповнення, γT_0 – тривалість або ширина імпульсу, α – коефіцієнт зсуву, αT_0 – положення імпульсу всередині періоду повторення.

В імпульсних елементах можуть здійснюватися три типи модуляції: *амплітудна, широтна і часова*. Імпульсні САК класифікуються відповідно до типу застосованої модуляції в них.

2.1.4 Типи імпульсної модуляції сигналів

Процес амплітудно-імпульсної модуляції (АІМ) демонструє рис. 2.4. Безперервний сигнал $x_{\text{вх}}(t)$ в імпульсному елементі (ІЕ) перетворюється на імпульсний сигнал $x_{\text{вих}}(t)$. При цьому тривалість імпульсів $\gamma T_0 = \text{const}$, а їх амплітуда A пропорційна амплітуді вхідного сигналу в моменти квантування. Знак вихідного сигналу ІЕ відповідає знаку $x_{\text{вх}}$.

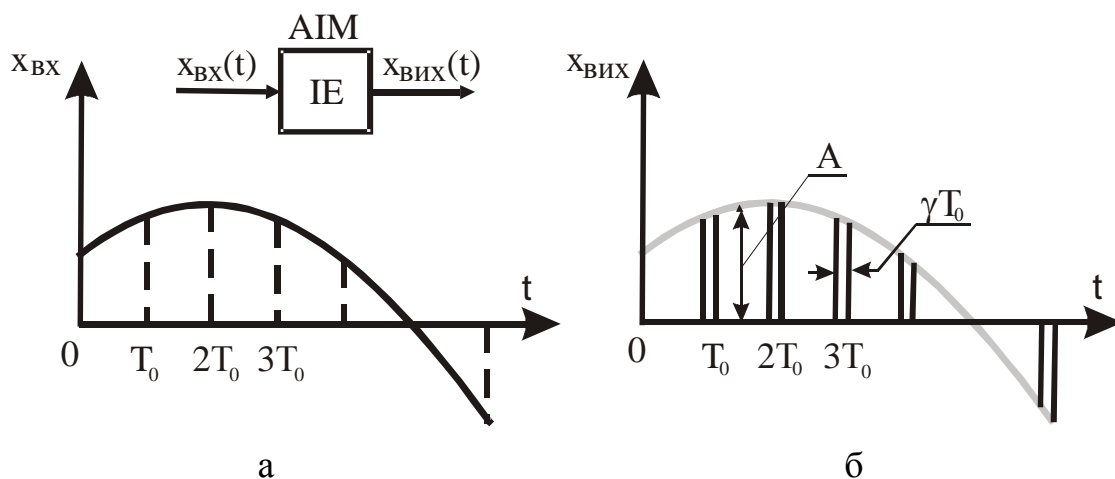


Рис. 2.4. Процес AIM: а – вхідний сигнал ІЕ; б – вихідний сигнал ІЕ

Перетворення сигналу при широтно-імпульсній модуляції (ШІМ) ілюструє рис. 2.5. Тут послідовність імпульсів на виході має однакову амплітуду, але їх ширина γT_0 пропорційна значенню амплітуди вхідного сигналу в моменти квантування. Знак імпульсів визначається знаком вхідного сигналу.

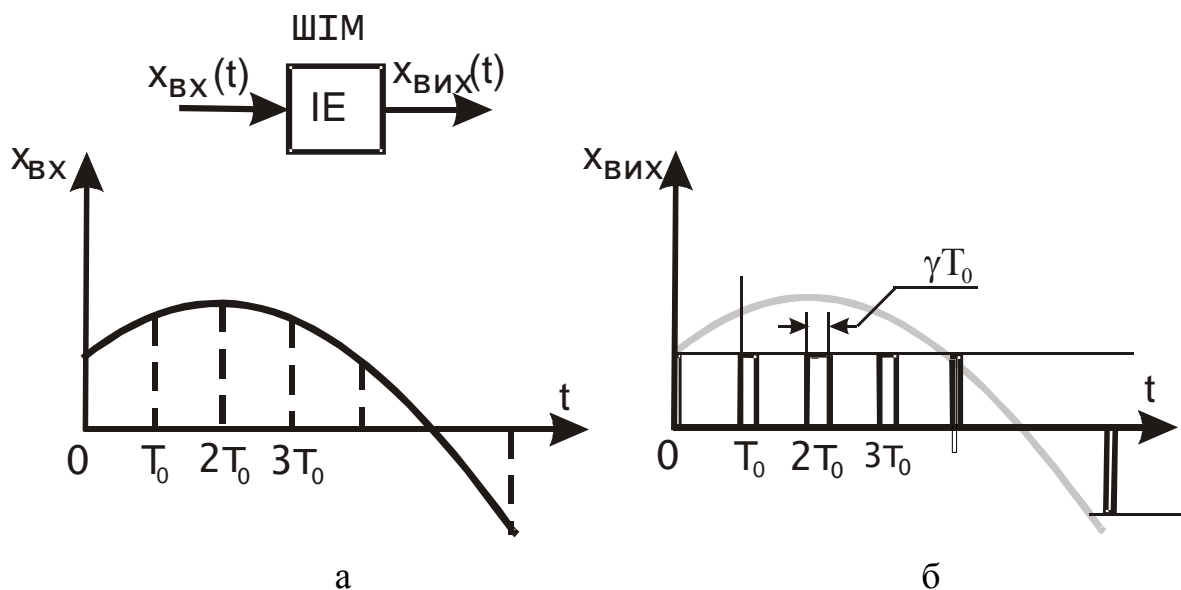


Рис. 2.5. Процес ШІМ: а – вхідний сигнал ІЕ; б – вихідний сигнал ІЕ

Процес часово-імпульсної модуляції (ЧІМ) відображено на рис. 2.6. При ЧІМ на виході ІЕ виникає послідовність імпульсів сталої амплітуди і ширини, зсув яких за часом αT_0 (або фаза імпульсу) відносно моментів квантування $0, T_0, 2T_0$ і т.д. пропорційний значенням вхідного сигналу в ці моменти часу. Знак вихідного сигналу ІЕ відповідає знаку вхідного сигналу.

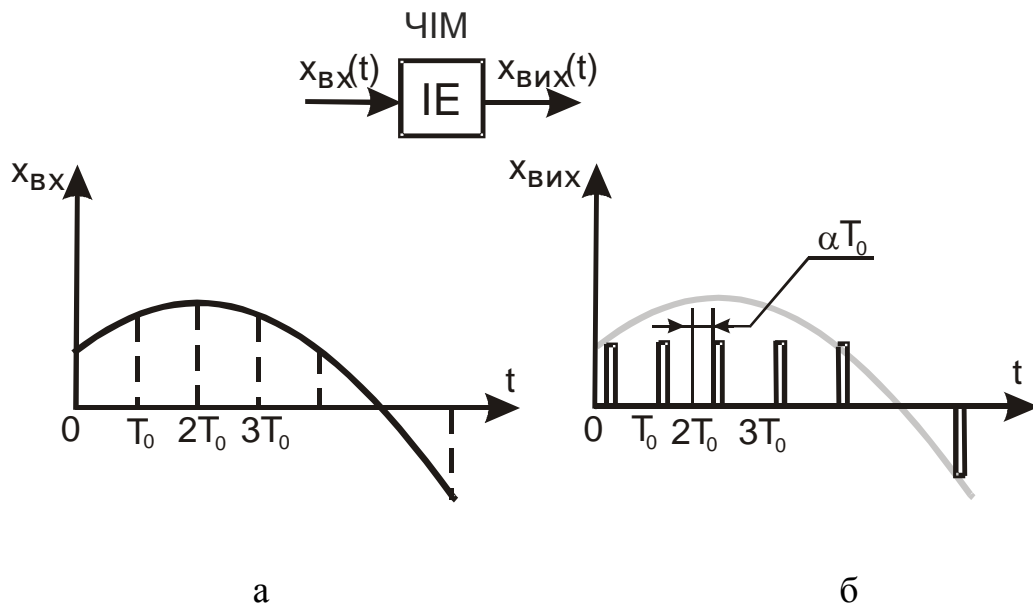


Рис. 2.6. Процес ЧІМ: а – вхідний сигнал ІЕ; б – вихідний сигнал ІЕ

2.1.5 Переваги імпульсних САК

Основними перевагами імпульсних САК є наступні.

1. Можливість використання одного імпульсного регулятора для керування декількома однотипними об'єктами шляхом їх почергового підключення до регулятора протягом періоду квантування.

2. Один і той же канал зв'язку може використовуватися декількома САК з об'єктами, що віддалені від імпульсних керувальних пристроїв. Це реалізується шляхом почергового з'єднання регуляторів та об'єктів протягом періоду квантування.

3. Краща захищеність від завад. Це пов'язано з тим, що інформація передається короткими імпульсами, а більшу частину періоду квантування імпульсна САК є розімкнутою і завад не сприймає.

Оскільки з імпульсного елемента інформація надходить лише в дискретні моменти часу, то в загальному випадку динамічна точність імпульсних САК буде нижчою у порівнянні з неперервними системами. Це являється їх недоліком.

Література: [1, с. 496-505]; [2, с. 406-408]

СРС: Амплітудна модуляція першого та другого роду.

Література: [1, с. 498-499]; [2, с. 407-408].

Контрольні запитання:

1. Дайте визначення дискретної САК та дискретної ланки.
2. Проілюструйте графічно перетворення сигналів внаслідок квантування за часом та квантуванням за рівнем.
3. Наведіть графіки перетворення сигналів внаслідок квантування за часом та рівнем.
4. Як класифікуються дискретні САК за типами квантування сигналів?
5. У чому суть амплітудно-імпульсної модуляції сигналів?
6. Висвітліть, як відбувається широтно-імпульсна модуляція сигналів?
7. Поясніть суть часово-імпульсної модуляції сигналів.
8. Наведіть класифікацію імпульсних САК за типами модуляції.
9. Якими є переваги та недоліки імпульсних САК?

Тема 2.2 Математичний апарат дослідження імпульсних САК

2.2.1 Поняття про решітчасту функцію

Решітчастою називається функція $x(kT_0)$, яку утворюють ординати безперервної функції $x(t)$ (рис. 2.7, а) в дискретні моменти часу $t_i = kT_0$ (рис. 2.7, б), де k – будь-яке ціле число; T_0 – період дискретності (такт квантування). Решітчаста функція існує тільки в дискретні моменти часу, а між ними вона дорівнює нулю.

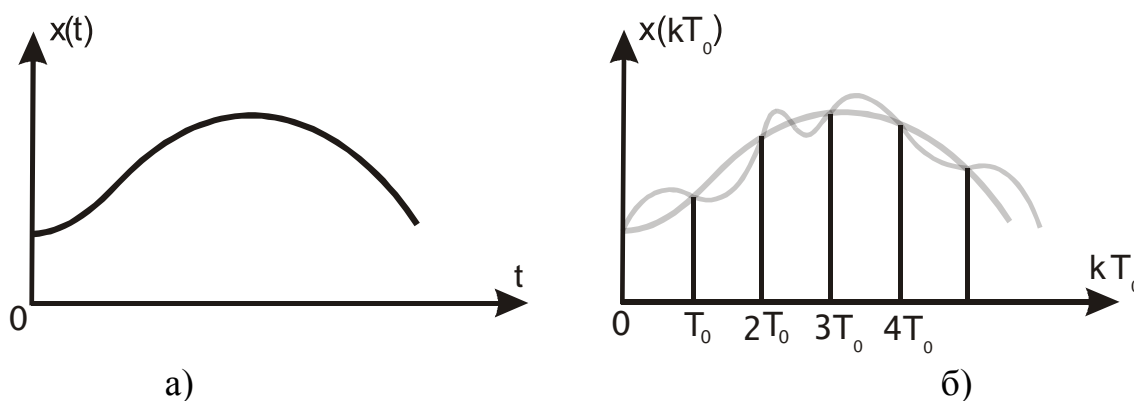


Рис. 2.7. Неперервна (а) та відповідна їй решітчаста (б) функції

Аналітично решітчаста функція визначається як

$$x(kT_0) = x(t) \Big|_{t=kT_0}. \quad (2.1)$$

Наприклад, для експоненціальної безперервної функції $x(t) = e^{\beta t}$ відповідною решітчастою функцією є $x(kT_0) = e^{\beta kT_0}$.

Решітчаста функція відображає властивості безперервної функції тільки в дискретні моменти часу. Слід зазначити, що при заданому T_0 кожній безперервній функції може відповідати лише одна решітчаста функція. Проте кожній решітчастій функції можна поставити у відповідність безліч неперерв-

рвних функцій, як це ілюструє рис. 2.7, б. Іншими словами, відображення неперервної функції у решітчасту є однозначним, а навпаки – ні.

Для зручності дослідження імпульсних систем вводять нову змінну $\bar{t} = t/T_0$, тобто відносний час. Тоді неперервній функції $f(t)$ з аргументом \bar{t} (рис. 2.8, а) буде відповідати решітчаста функція $f(kT_0)$ з аргументом k (рис. 2.8, б).

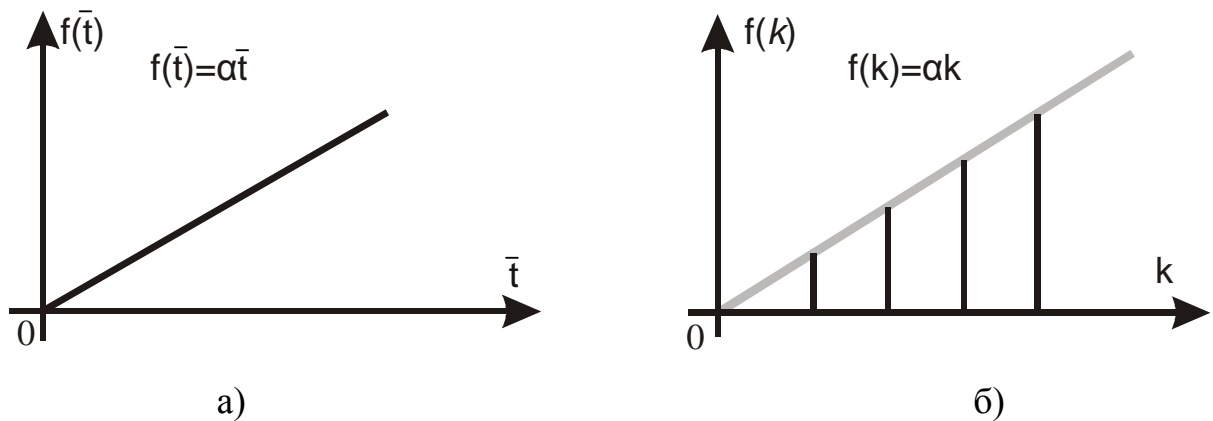


Рис. 2.8. Неперервна (а) та решітчаста (б) функції у відносному часі

3.2.2 Різниці решітчастих функцій

Швидкість зміни решітчастої функції $x(kT_0)$ характеризується її першою скінченною різницею $\Delta x(kT_0)$, або, спрощено, першою різницею, що є аналогом похідної в безперервних функціях. Вона визначається як

$$\Delta x(kT_0) = \frac{x[(k+1)T_0] - x(kT_0)}{T_0} \quad (2.2)$$

або

$$\Delta x(k) = x(k+1) - x(k), \quad (2.3)$$

якщо використовується відносний дискретний час $k = kT_0 / T_0$. На рис. 2.9, а зображена решітчаста функція $x(k)$, а на рис. 2.9, б – її перша різниця $\Delta x(k)$.

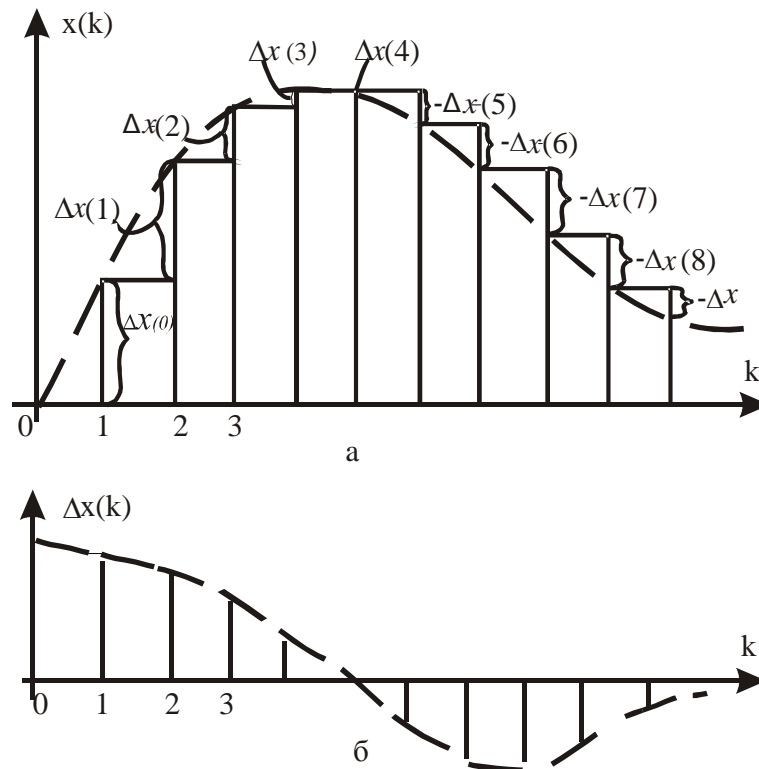


Рис. 2.9. Решітчаста функція (а) та її перша різниця (б)

Друга різниця або різниця другого порядку обчислюється за формулою

$$\Delta^2 x(k) = \Delta x(k+1) - \Delta x(k) \quad (2.4)$$

або, розкриваючи перші різниці згідно з (2.3),

$$\begin{aligned} \Delta^2 x(k) &= x(k+2) - x(k+1) - (x(k+1) - x(k)) = \\ &= x(k+2) - 2x(k+1) + x(k) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Різниця n -го порядку визначається співвідношенням

$$\Delta^n x(k) = \Delta^{n-1} x(k+1) - \Delta^{n-1} x(k). \quad (2.6)$$

Література: [1, с. 506-509]; [2, с. 408-410].

СРС: Зміщені решітчасті функції.

Література: [1, с. 506-507]; [2, с. 411-412].

Контрольні запитання:

1. Що таке решітчаста функція?
2. Запишіть вирази для решітчастих лінійної та квадратичної функцій.
3. Як визначається безперервний та дискретний відносний час?
4. Поясніть, чому визначення решітчастої функції за безперервною є однозначним, а навпаки – ні?
5. Що характеризує швидкість зміни решітчастої функції?
6. Запишіть формулу для першої різниці решітчастої функції в абсолютному та відносному часі.
7. Запишіть формулу для другої різниці решітчастої функції у відносному часі.

3.2.3 Лінійні різницеві рівняння та стійкість їх розв'язків

Як відомо, для математичного опису безперервних САК застосовуються лінійні диференціальні рівняння, що визначають взаємозв'язок між функцією та її похідними

$$a_0 \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx(t)}{dt} + a_n x(t) = y(t)$$

Аналогічним чином, дискретні САК описують рівняння у скінченних різницях або, спрощено, різницеві рівняння, які визначають взаємозв'язок між решітчастою функцією та її різницями

$$a_0 \Delta^n x(k) + a_1 \Delta^{n-1} x(k) + \dots + a_{n-1} \Delta x(k) + a_n x(k) = y(k) \quad (2.7)$$

Можна довести, що диференціальне рівняння порядку n є граничним виразом відповідного різницевого рівняння при $T_0 \rightarrow 0$. Отже, оператор різниці Δ для решітчастої функції є своєрідним аналогом оператора диференціювання $p = d/dt$ для безперервної функції:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} = \lim_{T_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta^n y(kT_0)}{T_0^n}.$$

Цей вираз можна використовувати для знаходження різницевого рівняння як аналогу диференціального рівняння. Розглянемо приклад.

Приклад 2.1. Дістати різницеве рівняння з диференціального

$$3y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = x(t).$$

Розв'язання. При переході до відносного часу та з урахуванням наведених вище виразів для різниць (2.3) і (2.5), отримаємо

$$3(y(k+2) - 2y(k+1) + y(k)) + 4(y(k+1) - y(k)) + 5y(k) = x(k).$$

Після спрощення, дістанемо шукане різницеве рівняння

$$3y(k+2) - 2y(k+1) + 4y(k) = x(k).$$

Різницеві рівняння розв'язують методами, аналогічними до методів розв'язання диференціальних рівнянь. Якщо в різницеве рівняння (2.7) підставити вирази для різниць, отримаємо неоднорідне різницеве рівняння

$$b_0x(k+n) + b_1x(k+n-1) + \dots + b_{n-1}x(k+1) + b_nx(k) = y(k), \quad (2.8)$$

характеристичне рівняння якого запишеться у вигляді

$$b_0z^n + b_1z^{n-1} + \dots + b_{n-1}z + b_n = 0,$$

де z – оператор додатного зсуву решітчастої функції за часом. Загальний розв'язок рівняння (2.8) без правої частини має вигляд при некратних коренях

$$x(k) = c_1z_1^k + c_2z_2^k + \dots + c_nz_n^k, \quad (2.9)$$

де z_i ($i=1,2,\dots,n$) – корені характеристичного рівняння; c_i – довільні сталі (сталі інтегрування). Для стійкості розв'язку (2.9) необхідно, щоб з плином часу він прямував до нуля, тобто $\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = 0$. Звідси випливає, що

загальний розв'язок буде стійким, якщо

$$|z_i| < 1 \quad (i=1,2,\dots,n). \quad (2.10)$$

Два варіанти розв'язків різничевого рівняння зображені на рис. 2.10.

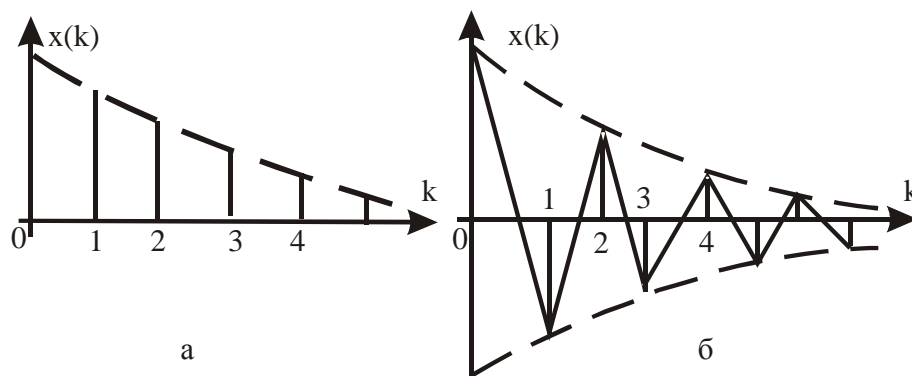


Рис. 2.10. Стійкі розв'язки різницевих рівнянь: а – монотонний; б – різнознаковий

При додатних z_i процес буде монотонно затухаючим, а при від'ємних – різнознаковим затухаючим, як це зображено на рис. 2.10, а та 2.10, б відповідно.

Отже сформулюємо *кореневий критерій стійкості розв'язків різницевих рівнянь*: щоб розв'язок різницевого рівняння був стійким, корені його характеристичного рівняння повинні лежати в колі одиничного радіусу, тобто корені за модулем мають бути меншими від одиниці.

На рис. 2.11 представлена ілюстрація до кореневого критерію стійкості, де зірочками позначені корені характеристичного рівняння.

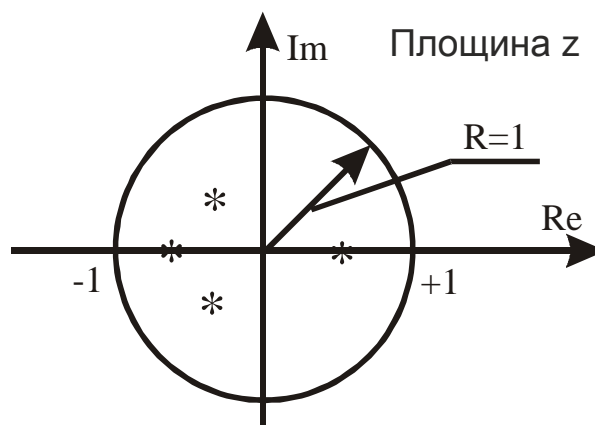


Рис. 2.11. Розташування коренів стійких різницевих рівнянь

Приклад 2.2. Нехай маємо різницеве рівняння

$$x(k+2) - 1,2x(k+1) + 0,3x(k) = 0.$$

Задано початкові умови $x(0) = x_0$, $x(1) = x_1$. Визначити, чи стійкий його розв'язок.

Розв'язання. Характеристичне рівняння, що відповідає різницевому, має вигляд:

$$z^2 - 1,2z + 0,3 = 0,$$

корені якого

$$z_{1,2} = 0,6 \pm \sqrt{0,36 - 0,3} = 0,6 \pm 0,24; \quad z_1 = 0,84; \quad z_2 = 0,36.$$

Звідси $x(k) = c_1 \cdot 0,84^k + c_2 \cdot 0,36^k$, де c_1, c_2 – сталі інтегрування.

Отже розв'язок стійкий і монотонний, оскільки кожний з коренів z_1, z_2 за модулем менший від одиниці і додатний.

Для дослідження різницевих рівнянь у загальному випадку широко використовується дискретне перетворення Лапласа, z -перетворення, w -перетворення, а також частотні методи.

2.2.4 Дискретне перетворення Лапласа і z -перетворення

Як відомо, звичайне або неперервне перетворення Лапласа функції $x(t)$ визначається за формулою

$$L\{x(t)\} = X(p) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt} dt.$$

Для решітчастих функцій вводиться поняття дискретного перетворення Лапласа. Воно аналогічне неперервному перетворенню Лапласа із заміною інтеграла на суму. Для функції $x(kT_0)$ дискретне перетворення Лапласа визначається як

$$D\{x(kT_0)\} = X^*(p) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_0)e^{-pkT_0},$$

де $D\{\bullet\}$ – символ цього перетворення.

Введемо відносний час і отримаємо формулу дискретного перетворення Лапласа у відносному часі

$$D\{x(k)\} = X^*(q) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)e^{-qk}, \quad (2.11)$$

де $q = pT_0$ – безрозмірна комплексна змінна, яку називають параметром дискретного перетворення Лапласа.

Для дослідження імпульсних систем широко використовується так зване z -перетворення, яке також називають перетворенням Лорана. Воно випливає з дискретного перетворення Лапласа при $z = e^{pT_0}$ або $z = e^q$ і визначається за формулою

$$Z\{x(k)\} = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}. \quad (2.12)$$

Приклад 2.3. Визначити z -зображення одиничної решітчастої функції $x(k) = 1(k)$.

$$D(q) = \sum_{k=0}^{\infty} 1(k)e^{-qk} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot e^{-qk} = 1 + e^{-q} + e^{-2q} + e^{-3q} + \dots$$

Розв'язання. Аналізуючи $D(q)$, бачимо, що це нескінченна геометрична прогресія. У курсі математичного аналізу отримана її сума

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-qk} = \frac{1}{1 - e^{-q}} = \frac{e^q}{e^q - 1} = \frac{z}{z - 1}.$$

Приклад 2.4. Знайти z -перетворення функції $x(t) = e^{-\alpha t}$.

Розв'язання. Згідно з виразом для дискретного перетворення Лапласа маємо

$$X^*(p) = D\{x(kT_0)\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha kT_0} e^{-pkT_0} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(\alpha+p)kT_0}.$$

Користуючись формулою суми геометричної прогресії, одержуємо

$$X^*(p) = \frac{1}{1 - e^{-(\alpha+p)T_0}} = \frac{e^{pT_0}}{e^{pT_0} - e^{-\alpha T_0}}.$$

Здійснивши заміну $e^{pT_0} = e^q = z$, отримаємо $X(z) = \frac{z}{z - e^{-\alpha T_0}}$.

Аналогічно можна отримати дискретні перетворення Лапласа і z -перетворення для інших функцій. В табл. 2.1 наведено вирази для деяких елементарних і найбільш часто вживаних безперервних функцій, а також відповідних їм решітчастих функцій.

Таблиця 2.1. Решітчасті функції та z -перетворення

$x(t)$	$x(kT_0)$	$X(p)$	$X(z)$
--------	-----------	--------	--------

Безперервна функція	Решітчаста функція	Перетворення Лапласа	z-перетворення
$1(t)$	$1(kT_0)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$
t	kT_0	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{T_0 z}{(z-1)^2}$
$\frac{t^2}{2}$	$\frac{(kT_0)^2}{2}$	$\frac{1}{p^3}$	$\frac{T_0^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
$e^{-\alpha t}$	$e^{-\alpha kT_0}$	$\frac{1}{p+\alpha}$	$\frac{z}{z-e^{-\alpha T_0}}$
$1-e^{-\alpha t}$	$1-e^{-\alpha kT_0}$	$\frac{\alpha}{p(p+\alpha)}$	$\frac{(1-d)z}{(z-1)(z-d)}, d=e^{-\alpha T_0}$

При дослідженнях цифрових систем також буває необхідним за z -зображенням $X(z)$ знайти відповідну послідовність $x(kT_0)$. В таких випадках здійснюють так зване обернене z -перетворення, яке позначають

$$x(kT_0) = Z^{-1} \{X(z)\}.$$

Слід зазначити, що визначення вихідної неперервної функції часу $x(t)$ за зворотним z -перетворенням не є однозначним, оскільки решітчаста функція $x(kT_0)$ дорівнює $x(t)$ тільки в моменти часу $t = kT_0$.

Література: [1, с. 509-516]; [2, с. 412-422].

СРС: Властивості z -перетворення.

Література: [1, с. 512-514]; [2, с. 416-422].

Контрольні запитання:

1. Що таке різницеве рівняння?

2. Як отримати різницеве рівняння за лінійним диференціальним рівнянням?
3. За якої умови лінійне різницеве рівняння перетворюється в лінійне диференціальне рівняння?
4. Запишіть аналітичний вираз для оператора z та поясніть його дію на решітчасту функцію.
5. Сформулюйте критерій стійкості розв'язків різницевого рівняння.
6. Що таке дискретне перетворення Лапласа?
7. Запишіть формулу для z -перетворення решітчастої функції.

Тема 2.3 Передатні функції імпульсних САК

2.3.1 Структурна схема імпульсної САК. Поняття дискретної передатної функції та отримання її за таблицями z-перетворень

Структурна схема імпульсної системи, що містить імпульсний елемент (ІЕ), можна представити у зображеному на рис. 2.12 вигляді

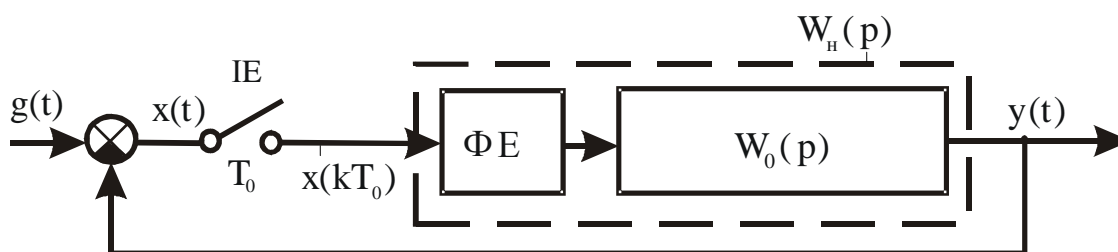


Рис. 2.12. Структурна схема імпульсної системи

Зазвичай ІЕ вважають *ідеальним*, вважаючи, що він формує $x(kT_0) = x(t)|_{t=kT_0}$ (рис. 2.13,а,б). Далі решітчаста функція надходить на формуючий елемент (ФЕ) або фіксатор, який формує реальні імпульси будь-якої іншої форми. Сукупність ідеального ІЕ і ФЕ утворює *реальний імпульсний елемент*.

Нехай ІЕ утворює імпульси типу δ -функції (функція Дірака), нескінченно вузькі, але площа яких пропорційна координаті $x(t)|_{t=kT_0}$. Знайдемо $W_n(p) = W_\phi(p)W_0(p)$ – передатну функцію зведеної системи, що являє собою послідовне з'єднання фіксатора й об'єкта. Введемо поняття вагової функції $w_n(t)$ зведеної системи $W_n(p)$ тобто реакцію неперервної частини на одиничну імпульсну решітчасту функцію

$$\delta_0(k) = \begin{cases} 1 & \text{при } t = 0; \\ 0 & \text{при } t \neq 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Якщо розглядати реакцію зведеної системи $y(\bar{t})$ (рис.2.13 в,г) тільки в дискретні моменти часу, то можна ввести поняття решітчастої вагової функції $w_h(k)$ при $t = kT_0$. Це дозволить знайти реакцію об'єкта $y(k)$ на довільний вхід $x(k)$. Узагальнюючи сказане, запишемо

$$y(t) = \sum_{m=0}^k x(mT_0) w_h(t - mT_0), \quad kT_0 \leq t < (k+1)T_0.$$

Для дискретних моментів часу

$$y(k) = \sum_{m=0}^{\infty} x(m) w_h[k - m], \quad (2.14)$$

Знайдемо z-перетворення від лівої і правої частин виразу (2.14):

$$Z\{y(k)\} = Z\left\{\sum_{m=0}^{\infty} x(m) w_h[k - m]\right\}.$$

У підсумку, на підставі формули згортки, одержуємо

$$Y(z) = W(z) X(z); \quad (2.15)$$

$$W(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}. \quad (2.16)$$

За аналогією з неперервними системами, $W(z)$ називають *дискретною передатною функцією* розімкнутої імпульсної системи. Вона є відношенням z-зображень вихідного сигналу до вхідного за нульових початкових умов.

Дискретна передатна функція $W(z)$ за визначенням являється z-зображенням свого оригіналу – решітчастої вагової функції, отже

$$W(z) = Z\{w_h(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} w_h(k) z^{-k}. \quad (2.17)$$

Оскільки передатна функція неперервної частини

$$W_h(p) = L\{w_h(t)\} = \int_0^{\infty} w_h(t) e^{-pt} dt,$$

записуємо формулу для $W(z)$ у наступному вигляді:

$$W(z) = Z\{W_h(p)\}. \quad (2.18)$$

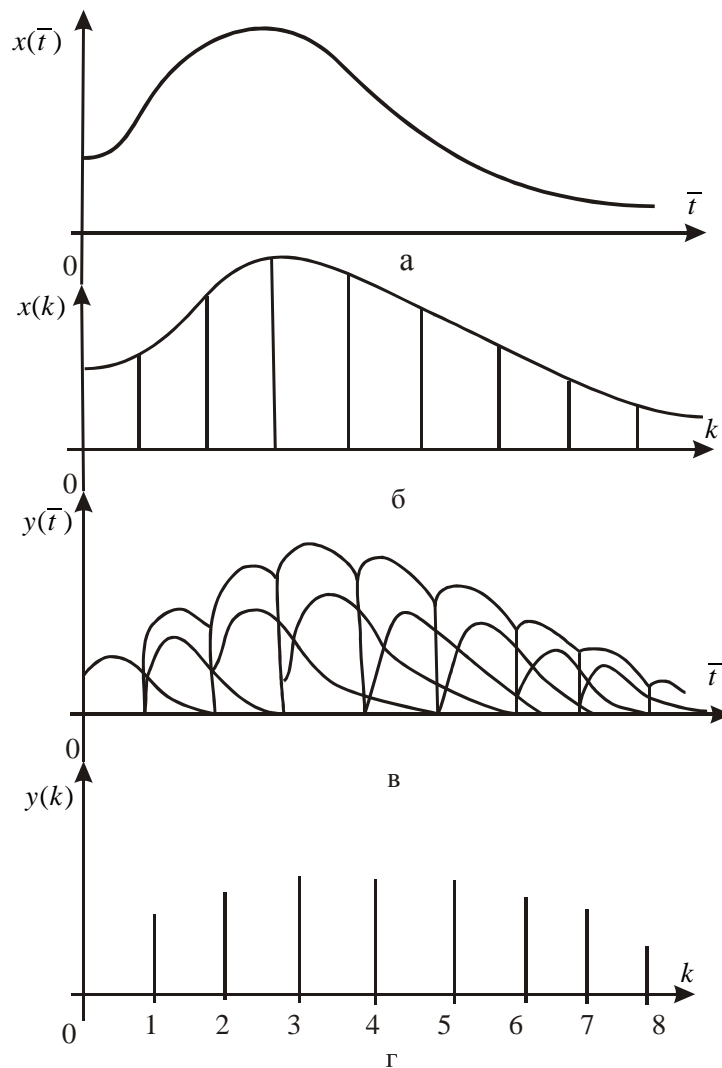


Рис. 2.13. Сигнали на вході (а) і виході (б) ІЕ та сигнали на виході зведеного об'єкта у неперервному (в) та дискретному часі (г)

Якщо передатна функція неперервної частини $W(p) = W_1(p)W_2(p)$, то

$$W(z) = W_1W_2(z), \quad (2.19)$$

оскільки $W_1W_2(z) \neq W_1(z)W_2(z)$. Тобто, у системі з одним ІЕ дискретна передатна функція обчислюється відразу для всієї неперервної частини.

Отже процедуру визначення дискретної передатної функції неперервної частини САК можна записати як наступну послідовність дій.

1. Для неперервної частини системи визначається вагова функція $w(t)$, тобто її реакція на одиничну імпульсну функцію.

2. Потім з використанням таблиці z -перетворень функції $w(kT_0)$ або $W(p)$ визначається z -перетворення $W(z)$.

3. У складних для визначення $w(t)$ випадках передатну функцію $W(p)$ розкладають на прості дроби і подають у вигляді суми доданків. Потім для кожного доданка знаходять z -перетворення. Сума доданків дає шукану дискретну передатну функцію

$$W(z) = W_1(z) + W_2(z) + \dots \quad (2.20)$$

Література: [1, с. 516-520].

СРС: Приклад 10.5 [1, с. 519] без інтегрувальної ланки в об'єкті.

Література: [1, с. 519-520].

Контрольні запитання:

1. Наведіть структурну схему імпульсної САК та поясніть її будову.
2. Як працює ідеальний імпульсний елемент?
3. Що таке реальний імпульсний елемент?
4. Наведіть форму сигналів на вході і виході ІЕ та ФЕ (екстраполятора нульового порядку).
5. Що таке одинична імпульсна решітчаста функція?
6. Дайте визначення імпульсної передатної функції.
7. Висвітліть процедуру визначення дискретної передатної функції безперервної частини САК.

2.3.2 Передатна функція фіксатора нульового порядку

Розглянемо тепер питання про одержання передатної функції для екстраполятора з фіксацією на період, тобто при $\gamma = 1$. Такий тип фіксуючого ланцюга, що перетворює послідовність імпульсів, зображену на рис. 2.14,а у сигнал, форма якого показана на рис. 2.14,б, являє собою східчасту функцію.

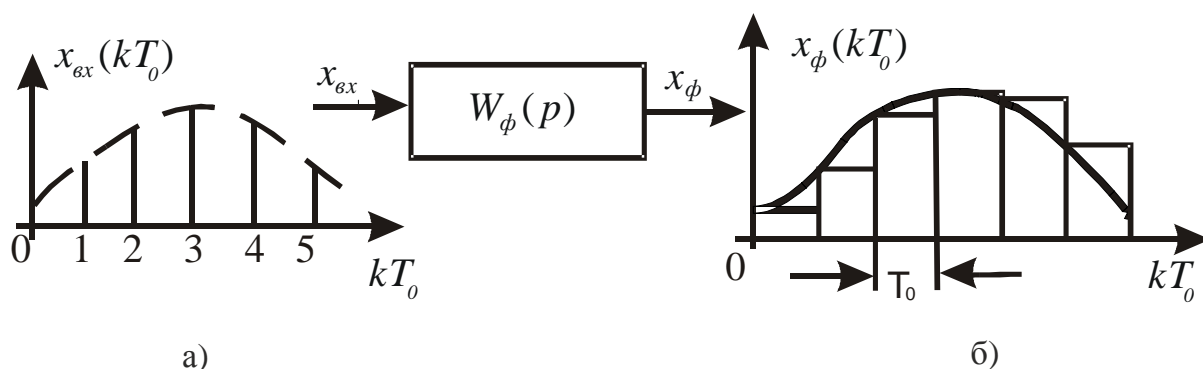


Рис. 2.14. Вхідний (а) та вихідний (б) сигнали фіксатора нульового порядку

Тоді $W_{\phi}(p) = L\{w_{\phi}(t)\} = \int_0^{\infty} w_{\phi}(t) e^{-pt} dt$. Прямокутний імпульс можна представити двома сходянками

$$w_{\phi}(t) = [1(t) - 1(t - \gamma T_0)], \quad (2.21)$$

звідси

$$W_{\phi}(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-p\gamma T_0} = \frac{1 - e^{-p\gamma T_0}}{p}. \quad (2.22)$$

Розглянутий фіксатор називають часто екстраполятором або фіксатором нульового порядку. Існують також інші типи фіксуючих пристроїв, вихідний сигнал яких має трикутну, трапецеподібну, або іншу форму.

Нехай тривалість імпульсу буде дуже мала у порівнянні з періодом квантування, тобто $\gamma \ll 1$. Тоді передатну функцію формувача можна записати як

$$W_{\phi}(p) \approx \frac{1 - [1 - \gamma p T_0]}{p} \approx \frac{\gamma p T_0}{p} \approx \gamma T_0, \quad (2.23)$$

тому що $e^{p\gamma T_0} \approx 1 - \gamma_0 p T_0$ – розкладання в ряд Тейлора при малому γ . В результаті отримаємо дискретну передатну функцію зведеної неперервної частини САК при застосуванні формувача імпульсів малої тривалості

$$W(z) \approx \gamma T_0 Z \{W_0(p)\}. \quad (2.24)$$

Приклад 2.5. Визначити дискретну передатну функцію розімкнутої системи при застосуванні формувача імпульсів з фіксацією на період. Передатна функція неперервного об'єкта $W_0(p) = \frac{K}{Tp + 1}$.

Розв'язання. Передатна функція зведеного об'єкта

$$W_n(p) = W_{\phi}(p) W_0(p) = \frac{1 - e^{-pT_0}}{p} \frac{K}{Tp + 1}.$$

Дискретну передатну функцію зведеного об'єкта можна визначити як

$$W(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{W_0(p)}{p} \right\} = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{K}{p(Tp+1)} \right\}.$$

Розкладемо вираз у фігурних дужках на прості дроби

$$K \left(\frac{1}{p(Tp+1)} \right) = K \left(\frac{A}{p} + \frac{B}{Tp+1} = \frac{A(Tp+1) + Bp}{p(Tp+1)} \right);$$

$$(AT + B)p + A = 1, \quad A = 1, \quad (AT + B)p = 0.$$

у підсумку $A = 1$; $B = -T$:

$$\frac{K}{p(Tp+1)} = K \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{Tp+1} \right).$$

Далі, використовуючи табл. 2.1 z-перетворень, одержуємо

$$W(z) = \frac{z-1}{z} \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-d} \right) K, \quad d = e^{-T_0/T}.$$

$$W(z) = \frac{K(z-1)[z(z-d) - z(z-1)]}{z(z-1)(z-d)} = \frac{K(1-d)}{z-d} = \frac{K_1}{z-d},$$

де $K_1 = K(1-d)$. За дискретною передатною функцією $W(z) = Y(z)/X(z)$ запишемо різницеве рівняння

$$y(k+1) - dy(k) = K_1 x(k).$$

Приклад 2.6. Визначити дискретну передатну функцію розімкнутої системи з фіксатором нульового порядку при $W_0(p) = \frac{K}{p(Tp+1)}$, $K=100$, $T=1c$, $T_0=0,5c$.

Розв'язання. Передатна функція зведеного об'єкта

$$W_n(p) = \frac{1-e^{-pT_0}}{p} \frac{K}{p(Tp+1)} = (1-e^{-pT_0}) \frac{K}{p^2(Tp+1)}.$$

Дискретна передатна функція зведеного об'єкта визначається як

$$W_z(p) = \frac{z-1}{z} z \left\{ \frac{W_0(p)}{p} \right\} = \frac{z-1}{z} z \left\{ \frac{K}{p^2(Tp+1)} \right\}.$$

Розклавши вираз у фігурних дужках на прості дроби, одержимо

$$\frac{K}{p^2(Tp+1)} = K \left(\frac{1}{p^2} - \frac{T}{p} + \frac{T^2}{Tp+1} \right).$$

Далі, використовуючи табл. 2.1 z-перетворень, отримаємо

$$W(z) = K \frac{z-1}{z} \left[\frac{T_0 z}{(z-1)^2} - \frac{Tz}{z-1} + \frac{Tz}{z-d} \right], \quad d = e^{-T_0/T} = 0,51;$$

$$W(z) = \frac{K[(T_0 - T + dT)z + (1-d)T - dT_0]}{(z-1)(z-d)}.$$

Остаточно маємо

$$W(z) = \frac{11z + 8,5}{(z-1)(z-0,61)}.$$

2.3.3 Отримання дискретної передатної функції за формулою розкладання

Якщо задано передатну функцію зведеної неперервної частини системи, то, використовуючи формули розкладання, можна одержати дискретну передатну функцію у вигляді z-перетворення:

$$W(z) = \sum_i \frac{1}{1 - z^{-1} e^{T_0 x}} \text{Res} \{W(x)\}, \quad (2.25)$$

де $x = p_i$, $i = 1, \dots, n$; p_i – полюси $W(p)$; n – кількість полюсів; T_0 – період квантування; $\text{Res} \{W(x)\}$ – лишки для функції $W(p)$ для точок $x = p_i$.

Для кратних полюсів

$$W(z) = \sum_i \text{Res} \left\{ \frac{W(x)}{1 - z^{-1} e^{T_0 x}} \right\}, \quad (2.26)$$

де лишки знаходять для точок $x = p_i$, рівних полюсам $W(p)$. Лишки для функції $f(a)$ у точці a даної функції, що є полюсом кратності m , визначають за формулою

$$\text{Res} \{f(a)\} = \frac{1}{(m-1)!} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} \left[(x-a)^m f(x) \right] \right\}. \quad (2.27)$$

Приклад 2.7. Отримати z-перетворення передатної функції

$W(p) = \frac{5}{p(p+1)(p+2)}$ при періоді квантування $T_0 = 1\text{с}$. Полюси передатної функції прості і дорівнюють $p_1 = 0$; $p_2 = -1$; $p_3 = -2$.

Розв'язання. Після знаходження лишків $[(p - p_i)W(p)]_{p=p_i}$ і підстановки у формулу (2.25), одержимо

$$W(z) = \frac{5}{(1 - e^0 z^{-1})1 \cdot 2} + \frac{5}{(1 - e^{-1} z^{-1})(-1) \cdot 1} + \frac{5}{(1 - e^{-2} z^{-1})(-2)(-1)} =$$

$$= \frac{2,5}{1 - z^{-1}} - \frac{5}{1 - 0,368z^{-1}} + \frac{2,5}{1 - 0,135z^{-1}} = \frac{0,2z^{-1} + 0,731z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 - 0,368z^{-1})(1 - 0,135z^{-1})}.$$

Література: [1, с. 516-520].

СРС: Задачі для самостійного розв'язання: Задача 1 [5, с. 49].

Література: [5, с. 46-49].

Контрольні запитання:

1. Отримайте аналітично передатну функцію фіксатора (екстраполятора) нульового порядку.
2. Запишіть передатну функцію фіксатора з малою тривалістю прямокутних імпульсів у порівнянні з періодом квантування.
3. Як за дискретною передатною функцією отримати різницеве рівняння?
4. Якою буде передатна функція зведеного неперервного об'єкта при застосуванні фіксатора нульового порядку?
5. Поясніть, як за формулою розкладання визначається z-перетворення неперервної передатної функції.

Тема 2.4 Наближене визначення дискретної передатної функції та перетворення структур імпульсних САК

2.4.1 Визначення дискретної передатної функції за методом Боксера-Таллера

Функцію $W(p)$ можна перетворити до функції $W(z)$, використовуючи співвідношення

$$z = e^q = e^{pT_0} \quad \text{або} \quad pT_0 = \ln z \quad (2.28)$$

Розкладаючи в ряд, одержуємо для $z > 0$

$$\ln z = 2 \left(y + \frac{1}{3} y^3 + \frac{1}{5} y^5 + \dots \right), \quad (2.29)$$

де

$$y = \frac{z-1}{z+1} = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}. \quad (2.30)$$

Обмежуючись тільки першим членом розкладання в ряд, одержуємо

$$\frac{1}{p} = p^{-1} = \frac{T_0}{\ln z} = \frac{T_0}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}. \quad (2.31)$$

Ця формула називається z -перетворенням для p^{-1} . В табл. 2.2 наведені значення z -перетворень функцій $1/p^\nu$ для декількох показників степеня ν .

Процедура отримання дискретної передатної функції зведеної неперервної частини системи за методом Боксера-Таллера є наступною.

1. Визначаємо передатну функцію зведеної неперервної частини системи $W_n(p) = W_\phi(p)W_0(p)$.

2. Чисельник і знаменник цієї передатної функції ділимо на p^ν , де ν – степінь полінома знаменника, тобто $W_n(p)$ подається у вигляді $W_n(p^{-1})$.

Таблиця 2.2. Вирази $R_v(z)$ для наближеного визначення $W(z)$

$\frac{1}{p^v}$	$R_v(z)$
$\frac{1}{p}$	$\frac{T_0}{2} \frac{z+1}{z-1}$
$\frac{1}{p^2}$	$\frac{T_0^2}{12} \frac{z^2+10z+1}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{p^3}$	$\frac{T_0^3}{2} \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
$\frac{1}{p^4}$	$\frac{T_0^4}{6} \frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4} - \frac{T_0^4}{720}$

3. Ділимо функцію $W_n(p^{-1})$ на період дискретності T_0 і замінюємо в ній оператори $1/p^v$ виразами $R_v(z)$ з табл. 2.2.

4. Отриману $W_n(z)$ після алгебричних перетворень записуємо у стандартному вигляді $W_n(z) = B(z)/A(z)$.

Приклад 2.8. Задано структурну схему імпульсної системи з фіксатором нульового порядку, що зображена на рис. 2.15. Необхідно визначити дискретну передатну функцію зведеного об'єкта за методом Боксера-Таллера.

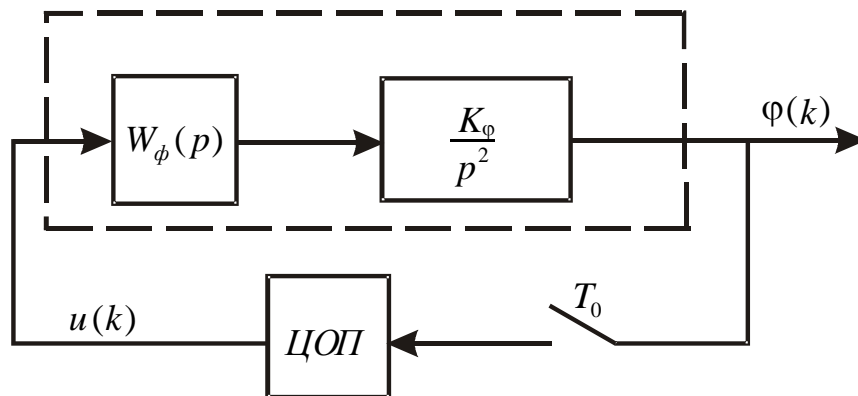


Рис. 2.15. Схема імпульсної САК до прикладу

Розв'язання. Знайдемо передатну функцію зведеного об'єкта:

$$W(p) = \frac{1 - e^{-pT_0}}{p} \cdot \frac{K_\varphi}{p^2} = \frac{e^q - 1}{e^q} \cdot \frac{K_\varphi}{p^3}.$$

Розділивши цю передатну функцію на період квантування та замінивши член $\frac{1}{p^3}$ відповідним виразом $R_v(z)$ з табл. 2.2, отримаємо шукану дискретну передатну функцію

$$W(z) = \frac{z-1}{z} \cdot \frac{K_\varphi}{T_0} \cdot \frac{T_0^3 z(z+1)}{2(z-1)^3} = \frac{T_0^2}{2} \cdot \frac{K_\varphi (z+1)}{(z-1)^2}.$$

2.4.2 Визначення дискретної передатної функції за методом Тастіна

Метод Тастіна дозволяє наближено визначити дискретну передатну функцію, виходячи із неперервної передатної функції ланки чи системи. Нехай неперервна система має передатну функцію

$$W(p) = B(p)/A(p). \quad (2.32)$$

Замінивши в (2.32) оператор p за формулою Тастіна

$$p = (2/T_0)(z-1)/(z+1). \quad (2.33)$$

отримаємо шукану дискретну передатну функцію

$$W(z) = B(z)/A(z). \quad (2.34)$$

Очевидно, що цей метод дещо простіший від методу Боксера-Таллера.

2.4.3 Основні правила перетворень структур імпульсних систем

З основного співвідношення (2.16) можна знайти дискретну передатну функцію будь-якої розімкнутої чи замкнутої імпульсної системи. У цьому підрозділі визначаються передатні функції основних видів структур імпульсних систем. Повніші таблиці z-перетворень для різних видів структур наведені в підручниках з дискретних систем. Розглянемо наступні випадки.

а) Імпульсна система з однією ланкою (рис. 2.16).

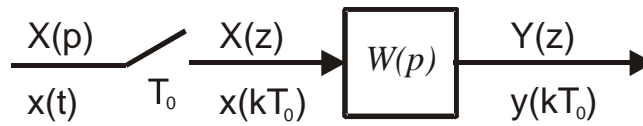


Рис. 2.16. Структурна схема імпульсної системи з однією ланкою

$$Y(z)=X(z)W(z), \quad (2.35)$$

де $W(z)=Z\{W(p)\}$.

б) Імпульсна система з послідовно з'єднаними ланками (рис. 2.17).

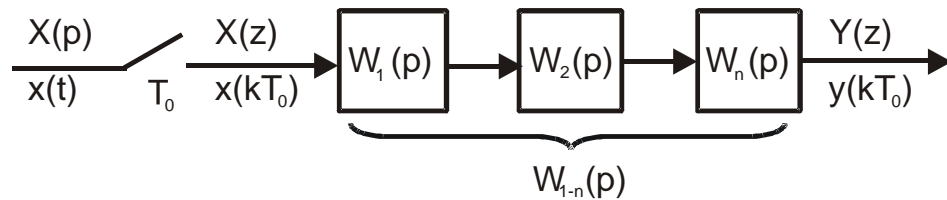


Рис. 2.17. Схема імпульсної системи з послідовно з'єднаними ланками

$$Y(z)=X(z)W_1W_2W_3...W_n(z), \quad (2.36)$$

де $W_1W_2...W_n(z)=Z\{W_1(p)W_2(p)...W_n(p)\}=Z\{W_{1-n}(p)\}$.

в) Імпульсна система із синхронізованими імпульсними елементами (рис. 2.18).

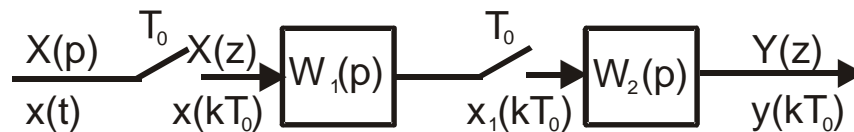


Рис. 2.18. Структурна схема імпульсної системи із синхронізованими ІЕ

$$Y(z)=X(z)W_1(z)W_2(z), \quad (2.37)$$

де $W_1(z)=Z\{W_1(p)\}$; $W_2(z)=Z\{W_2(p)\}$.

г) Замкнута імпульсна система керування (рис. 2.19).

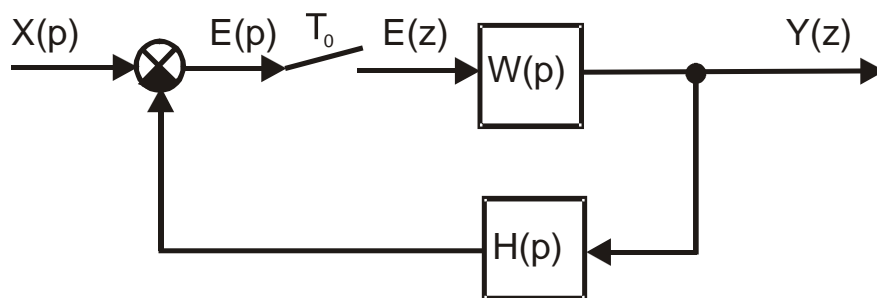


Рис. 2.19. Структурна схема замкнутої імпульсної САК

Для вихідного сигналу ІЕ справедливе співвідношення:

$$E(z) = X(z) - E(z)WH(z), \quad (2.38)$$

де $WH(z) = Z\{W(p)H(p)\}$.

Тоді z-перетворення вихідної величини $Y(z)$ визначається виразом:

$$Y(z) = E(z)W(z). \quad (2.39)$$

Підставляючи $E(z)$ з виразу (2.38) у (2.39), одержуємо дискретну передатну функцію системи зі зворотнім зв'язком

$$W_{xy}(z) = \frac{W(z)}{1 + WH(z)}. \quad (2.40)$$

Враховуючи (2.35), отримаємо z-перетворення вихідної величини $Y(z)$

$$Y(z) = X(z) \cdot W_{xy}(z). \quad (2.41)$$

Аналогічно до розглянутих співвідношень можна отримати дискретну передатну функцію для будь-якої лінійної імпульсної системи.

Література: [1, с. 520-522].

СРС: Отримати оригінал для z-зображення $Y(z) = 7z / (z^2 - 0.4z + 0.03)$.

Література: [1, с. 514-515].

Контрольні запитання:

1. Назвіть методи наближеного визначення дискретної передатної функції.
2. Висвітліть процедуру отримання дискретної передатної функції за методом Боксера-Таллера.
3. Зробіть порівняння методів наближеного визначення дискретної передатної функції Тастіна та Боксера-Таллера.
4. Як отримується дискретна передатна функція декількох послідовно з'єднаних неперервних ланок з імпульсним елементом на вході першої з них?
5. Як визначається дискретна передатна функція декількох послідовно з'єднаних неперервних ланок, на входах яких розташовані синхронізовані імпульсні елементи з однаковим тактом квантування?
6. Як отримується дискретна передатна функція замкнутої системи із неперервними ланками у каналах прямого та зворотного зв'язку?

Тема 2.5 Математичний опис імпульсних систем у просторі стану

2.5.1 Поняття про стан та простір стану імпульсної системи

Розглянутий нами вище апарат дискретних передатних функцій є класичним способом математичного описання імпульсних систем. Цей спосіб також називають описанням типу «вхід-вихід» (*input-output*). Проте в теорії як неперервних, так і дискретних САК на сьогодні широко застосовується альтернативний спосіб описання процесів керування у часовій області. Він має назву *метод змінних стану* і описує будь яку динамічну систему у т. з. *просторі стану* (*state space*).

Важливою властивістю методу змінних стану є універсальність у застосуванні для одновимірних та багатовимірних систем. Нагадаємо, що багатовимірною називається система, яка має більше ніж одну вихідну та/чи вхідну величину. Класичним прикладом багатовимірного об'єкта є паровий котел, у якому керованими величинами є температура та тиск пари. Варто зазначити, що в англomовній літературі для одновимірних систем вживають акронім SISO, а для багатовимірних – MIMO.

В загальному випадку деяка імпульсна система може бути представлена схемою, що зображена на рис. 2.20, де $u_1(k), \dots, u_m(k)$ – вхідні, а

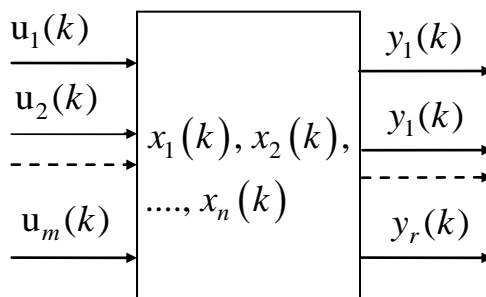


Рис. 2.20. Укрупнена схема багатовимірної імпульсної системи

$y_1(k), \dots, y_r(k)$ – вихідні величини, $k = 0, 1, 2, \dots$ – номер такту квантування. Сукупність зовнішніх дій на систему в дискретний момент часу kT_0 утворює її *вектор входу* $\mathbf{u}(k) = [u_1(k), u_2(k), \dots, u_m(k)]^T$. Зазначимо, що він в загальному випадку включає як завдання, так і збурення. Якщо збурення не розглядаються, або відсутні, цей вектор називають також *вектором керування*. Сукупність керованих координат дискретної системи утворюють її *вектор виходу* $\mathbf{y}(k) = [y_1(k), y_2(k), \dots, y_r(k)]^T$. Сукупність лінійно незалежних координат, що повністю характеризують внутрішній стан системи у будь-який момент часу називається *вектором стану* $\mathbf{x}(k) = [x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)]^T$. Координати вектора стану називаються *змінними стану*.

Множина можливих значень вектора стану $\mathbf{x}(k)$ в момент часу $t = kT_0$, утворює *простір стану* імпульсної системи. Аналогічно, множина значень вектора входу $\mathbf{u}(k)$ утворює *простір входу*, а значення вектора $\mathbf{y}(k)$ утворюють *простір виходу* дискретної системи.

3.5.2 Отримання дискретних рівнянь стану

Для отримання опису імпульсних систем у просторі стану існує декілька способів. Розглянемо спосіб, що ґрунтується на використанні дискретної передатної функції та відповідного їй різницевого рівняння

Нехай імпульсна система n -го порядку має передатну функцію

$$W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \dots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n}, \quad (2.42)$$

де $U(z), Y(z)$ – z -зображення входу та виходу системи. Для зручності отримання різницевого рівняння запишемо передатну функцію за від'ємними степенями z . Для цього помножимо чисельник та знаменник (2.42) на z^{-n} і дістанемо

$$W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}, \quad (2.43)$$

Щоб отримати різницеве рівняння системи необхідно в (2.43) виконати перехресне множення, а потім визначити зворотні z -перетворення для обох частин рівняння. Зробивши це, дістанемо рівняння

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_n u(k-n). \quad (2.44)$$

Рівняння (2.44) можна записати в компактному вигляді

$$A(z)y(k) = B(z)u(k), \quad (2.45)$$

де операторні поліноми $A(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^{-i}$, $a_0 = 1$, $B(z) = \sum_{i=0}^n b_i z^{-i}$. Поділивши

обидві частини (2.45) на $A(z)B(z)$ та ввівши нову змінну $x(k)$, дістанемо

$$\frac{y(k)}{B(z)} = \frac{u(k)}{A(z)} = x(k). \quad (2.46)$$

Тепер рівняння (2.45) можна замінити двома рівняннями

$$A(z)x(k) = u(k), \quad (2.47)$$

$$B(z)x(k) = y(k). \quad (2.48)$$

Введемо змінні стану

$$\left. \begin{aligned} x(k-n) &= x_1(k), \\ x(k-n+1) &= x_1(k+1) = x_2(k), \\ &\dots\dots\dots \\ x(k-1) &= x_{n-1}(k+1) = x_n(k), \\ x(k) &= x_n(k+1). \end{aligned} \right\}. \quad (2.49)$$

Враховуючи (2.49), можна записати рівняння (2.47) як

$$x_n(k+1) = u(k) - a_1 x_n(k) - a_2 x_{n-1}(k) - \dots - a_n x_1(k), \quad (2.50)$$

а рівняння (2.48) з врахуванням (2.49) та (2.50) матиме вигляд

$$y(k) = b_0 u(k) + (b_1 - b_0 a_1) x_n(k) + (b_2 - b_0 a_2) x_{n-1}(k) + \dots + (b_n - b_0 a_n) x_1(k). \quad (2.51)$$

Рівняння (2.49), (2.50) та (2.51) можна записати компактно у вигляді

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k), \quad (2.52)$$

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + Du(k), \quad (2.53)$$

де

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & \dots & -a_1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}; \quad (2.54)$$

$$\mathbf{C} = [(b_n - b_0 a_n) \quad (b_{n-1} - b_0 a_{n-1}) \quad \dots \quad (b_1 - b_0 a_1)]; \quad D = [b_0].$$

Отже ми отримали векторно-матричні рівняння (2.52) та (2.53), що є дискретними рівняннями стану одновимірної імпульсної системи. У цих рівняннях, перше з яких називається рівнянням динаміки, а друге – рівнянням виходу, \mathbf{A} – матриця стану, \mathbf{B} – вектор входу, \mathbf{C} – матриця виходу, D – коефіцієнт прямого зв'язку, $u(k)$, $y(k)$, $\mathbf{x}(k)$ – вхід, вихід та вектор стану.

У випадку багатовимірних систем в рівняннях стану (2.52), (2.53) вхід та вихід системи будуть векторами, а \mathbf{B} , \mathbf{C} та \mathbf{D} будуть матрицями. Структурна схема багатовимірної імпульсної САК на основі рівнянь стану зображена на рис. 2.21. Подвійні лінії на схемі відображають векторний характер сигналів.

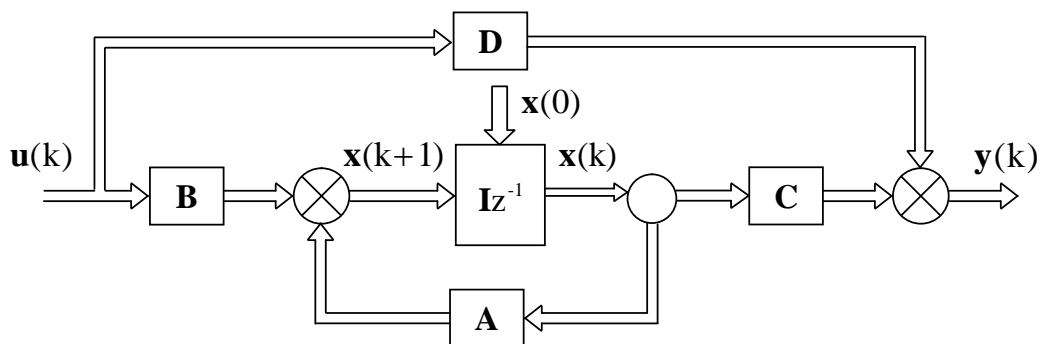


Рис. 2.21. Структурна схема імпульсної системи з описом у просторі стану

2.5.3 Керованість та спостережуваність імпульсних САК

Керованість та спостережуваність динамічних систем належать до основних понять ТАК. Дані поняття сформулював американський вчений угорського походження Рудольф Калман. Для дослідження цих властивостей системи використовується її опис у просторі стану (2.52), (2.53).

Керованість системи. Система називається *повністю керованою*, якщо за будь-яких заданих її початковому \mathbf{x}_0 і кінцевому \mathbf{x}_1 станах існує керуюча дія $\mathbf{u}(k)$, яка протягом скінченного інтервалу часу переведе систему з початкового стану у кінцевий.

Математично повна керованість визначається за наступною теоремою Калмана: лінійна n -вимірна система, що описується рівняннями (2.52), (2.53), повністю керована тоді і тільки тоді, коли блочна матриця

$$\mathbf{Q}_R = [\mathbf{B} : \mathbf{A}\mathbf{B} : \mathbf{A}^2\mathbf{B} : \dots : \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (2.55)$$

вимірності $n \times nt$ має ранг, що дорівнює n , тобто

$$\text{rank } \mathbf{Q}_R = n.$$

Матриця \mathbf{Q}_R називається *матрицею керованості*. Нагадаємо, що ранг матриці дорівнює найвищому порядку її мінору, що не дорівнює нулю. Очевидно, що для успішного розв'язання задачі синтезу САК необхідно перевірити чи об'єкт керування є повністю керованим.

Спостережуваність системи. Система називається *повністю спостережуваною*, якщо за відомою інформацією про її вихід $\mathbf{y}(k)$ і вхід $\mathbf{u}(k)$ за скінченний інтервал часу можна визначити всі координати вектора змінних стану системи $\mathbf{x}(k)$.

Проблема спостережуваності виникає тому, що в реальних об'єктах часто піддається вимірюванню, тобто спостереженню, лише його вихід $\mathbf{y}(k)$ і вхід $\mathbf{u}(k)$. Проте у процесі керування необхідне використання зворотних зв'язків за змінними стану. Якщо змінні стану фізично не вимірюються, то їх оцінюють за допомогою пристрою, що називається *спостерігачем*. Отримані оцінки використовують у регуляторі системи.

Умова повної спостережуваності лінійної стаціонарної системи, що описується рівняннями (2.52), (2.53), визначається за наступною теоремою Калмана: система повністю спостережувана тоді і тільки тоді, коли ранг матриці спостережуваності \mathbf{Q}_s вимірності $n \times nr$

$$\mathbf{Q}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T & \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T & \dots & (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{C}^T \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

дорівнює n .

Якщо ранг матриці \mathbf{Q}_s менший ніж n , то система не повністю спостережувана, якщо ранг дорівнює нулю – повністю не спостережувана.

Література: [1, с. 160-165; 362-366.].

СРС: Модифіковане z-перетворення.

Література: [1, с. 510-512].

Контрольні запитання:

1. Дайте визначення термінам: вектор стану, змінні стану, простір стану.
2. Як отримати опис імпульсної САК у просторі стану за дискретною передатною функцією системи?
3. Запишіть векторно-матричні рівняння стану імпульсної САК та вкажіть назву і вимірність усіх елементів цих рівнянь.
4. Як визначити керованість імпульсної системи?
5. Як визначити спостережуваність імпульсної системи?
6. Для чого в САК використовуються спостерігачі?

Тема 2.6 Частотні характеристики імпульсних САК

2.6.1 Отримання частотних характеристик імпульсних систем

Імпульсні САК можуть описуватися не тільки передатними функціями чи рівняннями стану, але і за допомогою частотних характеристик. Аналітичний вираз для АФХ імпульсної системи отримується із дискретної передатної функції $W(z)$ підстановкою $z = e^{j\bar{\omega}}$ у вигляді

$$W(e^{j\bar{\omega}}) = A^*(\bar{\omega})e^{j\varphi^*(\bar{\omega})}, \quad (2.57)$$

де $A^*(\bar{\omega}) = |W(e^{j\bar{\omega}})|$ – амплітудна частотна характеристика імпульсного ланцюга; $\varphi^*(\bar{\omega}) = \arg W(e^{j\bar{\omega}})$ – фазова частотна характеристика; $\bar{\omega} = \omega T_0$.

Наприклад, для неперервної ланки з передатною функцією $W(p) = \frac{k_0}{Tp + 1}$, матимемо

$$W(z) = \left(\frac{\gamma T_0}{T} \right) \frac{k_0 z}{z - d},$$

де $d = e^{-T_0/T}$, $z = e^{j\omega T}$. Зробивши заміну $z = \cos \omega T_0 + j \sin \omega T_0$, одержимо

$$W(e^{j\omega T}) = k_1 \frac{(\cos \omega T_0 + j \sin \omega T_0)}{\cos \omega T_0 - d + j \sin \omega T_0}, \quad k_1 = k_0 \frac{\gamma T_0}{T}.$$

Модуль і аргумент дорівнюють:

$$A^*(\bar{\omega}) = |W(e^{j\omega T_0})| = \frac{k_1}{\sqrt{1 + d^2 - 2d \cos \omega T_0}},$$

$$\varphi^*(\bar{\omega}) = \arg W(e^{j\omega T_0}) = \arctg \frac{\sin \omega T_0}{\cos \omega T_0 - d^{-1}}.$$

Побудуємо тепер амплітудну частотну характеристику імпульсної ланки при наступних параметрах: $k_0 = 10$, $T = 1$ с, $T_0 = 0,5$ с, $\gamma = 0,2$.

Тоді $d = e^{-T_0/T} = 0,61$,

$$A^*(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1,37 - 1,2 \cos \omega T_0}} \text{ тут } \omega T_0 = \bar{\omega},$$

$$\text{при } \bar{\omega} = 0 \quad A^*(\omega) = \frac{1}{\sqrt{0,16}} = \frac{1}{0,4} = 2,5;$$

$$\bar{\omega} = \pi/2 \quad A^*(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1,36}} = \frac{1}{1,17} = 0,85;$$

$$\bar{\omega} = \pi \quad A^*(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2,56}} = \frac{1}{1,6} = 0,62;$$

$$\bar{\omega} = 3/2\pi \quad A^*(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1,36}} = \frac{1}{1,17} = 0,85;$$

$$\bar{\omega} = 2\pi \quad A^*(\omega) = \frac{1}{1,17} = 2,5$$

У підсумку одержуємо графік для $A^*(\bar{\omega})$, представлений на рис. 2.22.

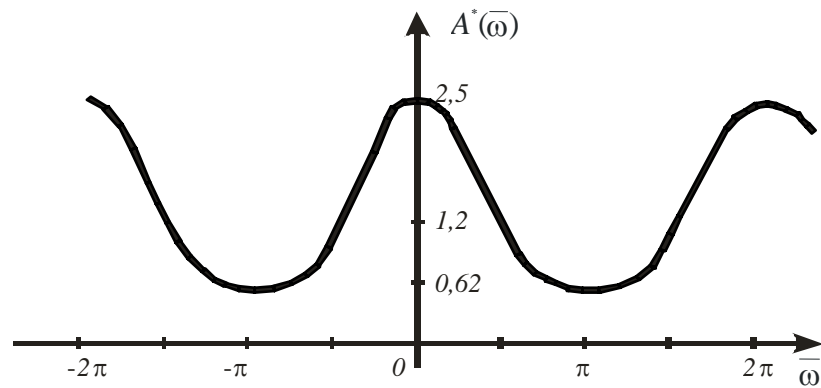


Рис. 2.22. Приклад АЧХ імпульсної ланки

Особливістю частотних характеристик імпульсних систем є те, що вони являють собою нескінченно повторювану частотну характеристику неперервної системи з частотою замикання імпульсного елемента ω_0 . На рис. 2.23 зображена АЧХ імпульсної системи за максимальної частоти спектру сигналу на виході неперервної частини ω_{\max} .

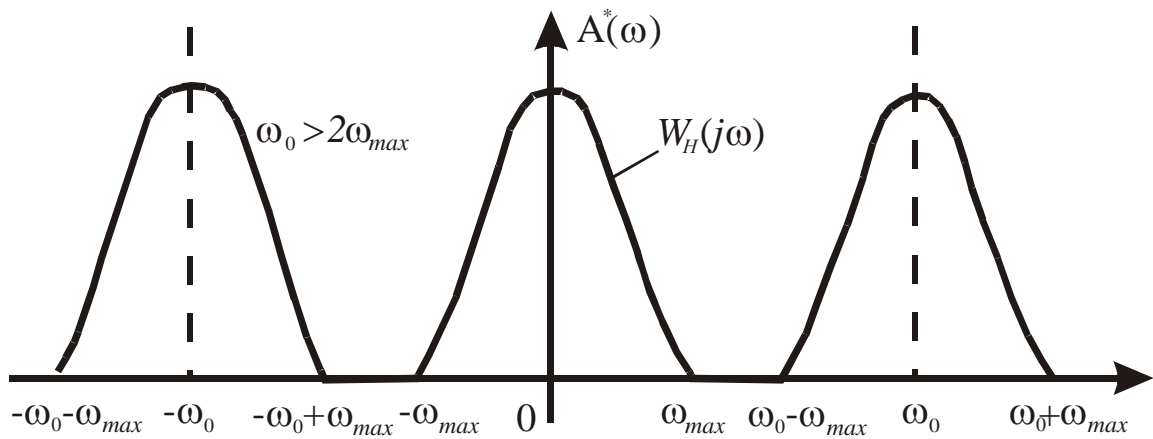


Рис. 2.23. АЧХ імпульсної системи

2.6.2 Спектри сигналів в імпульсних системах

Фізично періодичність частотної характеристики імпульсної системи пояснюється наступним чином.

При модуляції вхідним безперервним сигналом $x(t)$ послідовності одиничних імпульсів $\delta(kT_0)$ утворюються бічні спектри частот. Кількість цих спектрів нескінченна, тому що нескінченно вузький імпульс містить нескінченну кількість гармонік. Таким чином, можна сказати, що дія імпульсного елемента позначається в появі бічних смуг частот, ідентичних спектру неперервної функції (рис. 2.24).

Спектр, що розташований в околі нульової частоти, зазвичай називають *основним*, а зміщені спектри – *додатковими*.

З розглянутих частотних характеристик решітчастої функції випливає, що додаткові спектри не перекривають основний спектр, якщо максимальна частота спектру сигналу на виході неперервної системи ω_{\max} менша, ніж половина частота квантування $\omega_{\max} < \frac{\omega_0}{2}$, де $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$; T_0 – період квантування.

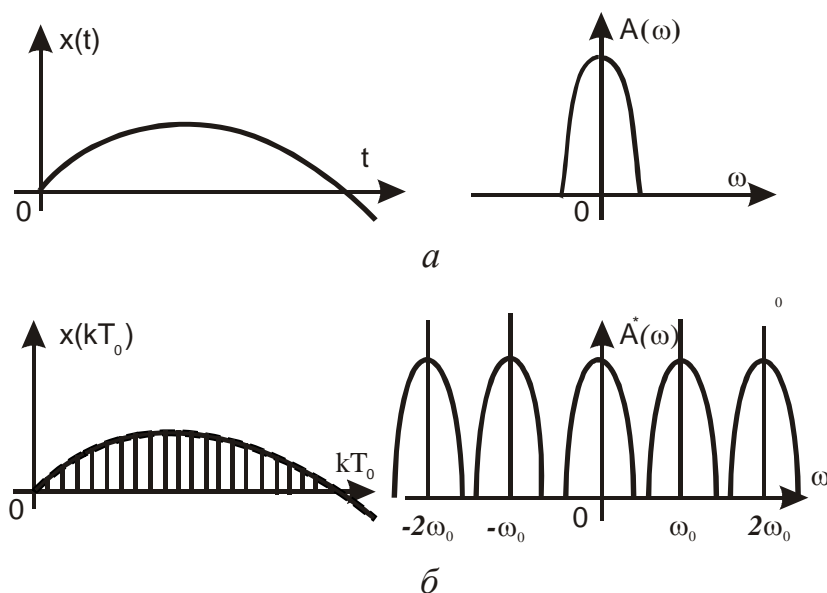


Рис. 2.24. Частотні спектри сигналів: *a* – спектр неперервного сигналу;
б – спектр квантованого за часом сигналу

Якщо період T_0 надто великий і $\omega_{\max} > \frac{\omega_0}{2}$, додаткові спектри перекриваються один одного (рис. 2.25) і частотні характеристики неперервної та імпульсної системи вже не збігаються у діапазоні частот $0 < \omega < \omega_{\max}$.

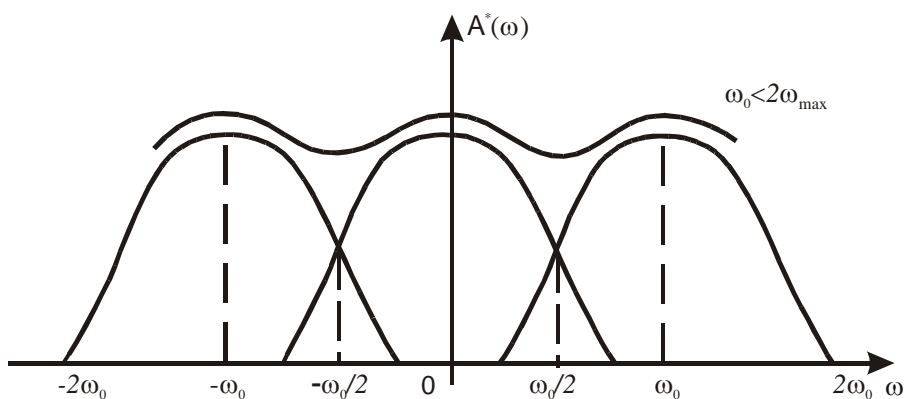


Рис. 2.25. АЧХ імпульсної системи при надто великому такті квантування

Очевидно, що вигляд частотного спектра неперервної системи можна відновити, якщо зміщені спектри не будуть перекриватися. Ці умови формулюються в імпульсній теоремі Котельнікова-Шеннона.

2.6.3 Теорема Котельнікова-Шеннона та визначення періоду квантування в імпульсних САК

Теорема Котельнікова-Шеннона: Квантований за часом неперервний сигнал може бути відновлений без спотворень, якщо частота квантування імпульсів ω_0 принаймні в 2 рази більша від максимальної частоти спектра квантованого сигналу ω_{\max} , тобто $2\omega_{\max} \leq \omega_0$. У цьому разі період квантування має бути

$$T_0 \leq \frac{\pi}{\omega_{\max}}.$$

Розглянемо спрощену методику визначення такту квантування T_0 в імпульсних САК на основі теореми Котельнікова-Шеннона.

Неперервний об'єкт системи є фільтром низьких частот. Хоча спектр його вихідного сигналу теоретично не має обмежень, на практиці приймається $\omega_{\max} = 3\omega_{ep}$, де ω_{ep} – гранична частота фільтрування. Ця частота отримується за АЧХ об'єкта $A(\omega)$ з умови $A(\omega_{ep}) = 0.1$, якщо об'єкт астатичний, або $A(\omega_{ep}) = 0.1A(0)$, якщо об'єкт статичний. При цьому такт квантування можна визначити за формулою

$$T_0 \leq \frac{\pi}{3\omega_{ep}}. \quad (2.58)$$

Розглянемо приклад.

Приклад 2.10. Для дискретної системи з об'єктом, що описується передатною функцією $W(p) = \frac{k_0}{Tp + 1}$, де $k_0 = 1, T = 1\text{с}$, розрахувати такт квантування і побудувати частотну характеристику.

Розв'язання. Знайдемо вираз для АЧХ об'єкта керування як

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \frac{k_0}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}.$$

Гранична частота фільтрування визначається з умови $A(\omega_{ep}) = 0.1A(0)$. В розглядуваному об'єкті $A(0) = 1$. Отже маємо рівняння

$$\frac{k_0}{\sqrt{1 + \omega_{ep}^2 T^2}} = 0.1 \Rightarrow 1 + \omega_{ep}^2 = 100.$$

Розв'язуючи це рівняння, отримаємо $\omega_{ep} = 9.95 (c^{-1})$. Використовуючи формулу (2.58), знайдемо такт квантування

$$T_0 \leq \frac{\pi}{3 \cdot 9.95} = 0.105 (c).$$

На рис. 2.26 представлена АЧХ об'єкта.

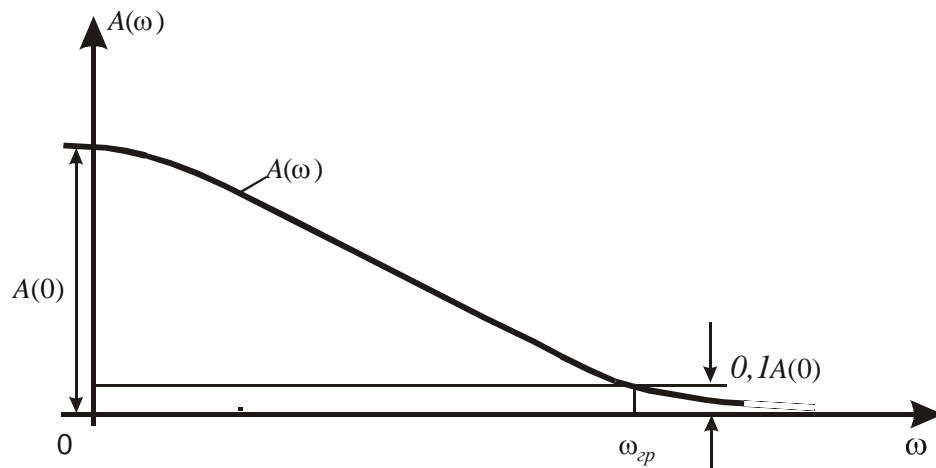


Рис 2.26. АЧХ об'єкта до прикладу визначення такту квантування

Із складнішими та більш точними методиками визначення такту квантування можна ознайомитися в [1-2].

Література: [1, с. 522-526].

СРС: Аналог критерію стійкості Михайлова для імпульсних САК.

Література: [1, с. 532-533].

Контрольні запитання:

1. У чому полягає особливість амплітудних частотних характеристик імпульсних САК?
2. Який частотний спектр імпульсної САК називають основним?

3. Який частотний спектр імпульсної САК називають додатковим або зміщеним?
4. Назвіть умову того, що частотні спектри імпульсної САК не перетинатимуться.
5. Сформулюйте імпульсну теорему Котельнікова-Шеннона.
6. Як визначається гранична частота фільтрування неперервного об'єкта?
7. Як визначається такт квантування в імпульсній САК за спрощеною методикою?

Тема 2.7 Стійкість імпульсних САК

2.7.1 Кореневий спосіб визначення стійкості дискретних систем

Дослідження стійкості лінійних імпульсних систем здійснюється за допомогою відомих критеріїв стійкості Гурвіца, Михайлова, Найквіста, модифікованих з урахуванням математичного опису. Розглянемо графічну інтерпретацію кореневого способу визначення стійкості імпульсних САК.

Характеристичне рівняння замкнутої САК за передатною функцією розімкнутої системи $W_p(z) = 0$ можна отримати як

$$1 + W_p(z) = 0; \quad z = e^q. \quad (2.59)$$

Умова стійкості в даному випадку – перебування всіх коренів характеристичного рівняння в лівій півплощині комплексної змінної q . Однак $W(e^q)$ – періодична функція уявної частини q з періодом 2π , оскільки $e^q = e^{\alpha \pm j\bar{\omega}} = e^{\alpha \pm j(2k\pi + \bar{\omega})}$, де $\bar{\omega} = \omega T_0$ – відносна частота, $k = 0, 1, 2, \dots$

Заміна змінних в (2.59) перетворить відрізок $(-\pi < \text{Im} q \leq \pi)$ уявної осі $\text{Re} q = 0$ площини q (рис. 2.27,а) в одиничне коло на площині z (рис. 2.27,б). Ліва півсмуга $\text{Re} q < 0$ ($-\pi < \text{Im} q \leq \pi$) площини q перетвориться у внутрішню частину кола, а права півсмуга $\text{Re} q > 0$ – у зовнішню частину кола.

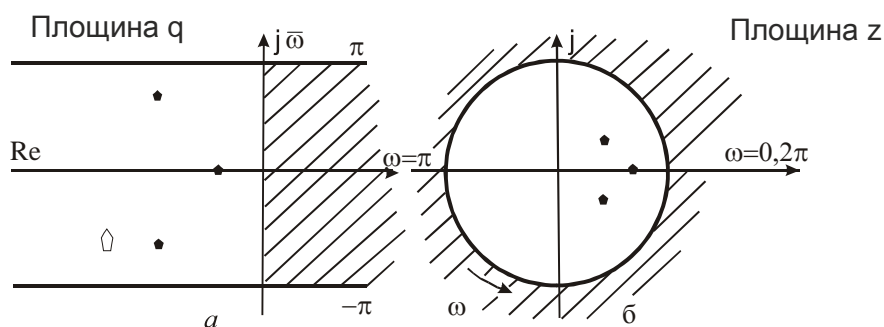


Рис 2.27. Графічна інтерпретація кореневого способу визначення стійкості САК

Тому при вивченні полюсів у площині q достатньо лише розглядати смугу $\pm \pi$ уздовж дійсної осі. Для стійкості необхідно, щоб корені характеристичного рівняння були лівими і знаходилися в лівій півсмугі комплексної площини q та в середині одиничного кола площини z .

2.7.2 Критерій стійкості Гурвіца для імпульсних систем

Аналог критерію Гурвіца можна отримати, якщо умову стійкості імпульсної системи $|z_i| < 1$ і замкнуту область площини z , що відповідає цій умові, відобразити на область $Re w < 0$ деякої допоміжної площини w . При цьому внутрішня частина кола одиничного радіуса площини z відображає ліву половину площини w . Формулювання критерію Гурвіца для імпульсної системи в цьому випадку збігається з формулюванням, застосовуваним для неперервних систем.

Характеристичне рівняння замкнутої дискретної системи

$$a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_{m-1} z + a_m = 0. \quad (2.60)$$

Після введення заміни

$$z = \frac{1+w}{1-w}, \quad (2.61)$$

одержимо

$$a_0 \frac{(1+w)^m}{(1-w)^m} + a_1 \frac{(1+w)^{m-1}}{(1-w)^{m-1}} + \dots + a_{m-1} \frac{1+w}{1-w} + a_m = 0 \quad (2.62)$$

і, після перетворень,

$$a'_0 w^m + a'_1 w^{m-1} + \dots + a'_{m-1} w + a'_m = 0. \quad (2.63)$$

Для даної системи умовою стійкості є розташування коренів у лівій півплощині w . Далі застосовується критерій Гурвіца для неперервних систем, де повинні виконуватись вимоги додатності коефіцієнтів характеристичного рівняння та додатності діагональних мінорів визначника Гурвіца:

$$\Delta_m > 0, \quad \Delta_{m-1} > 0, \dots \Delta_1 > 0;$$

Отримаємо умови стійкості для імпульсних САК порядку $m = 1 \div 3$.

$$m = 1. \quad D(z) = a_0 z + a_1 = 0;$$

$$a_0 \left(\frac{1+w}{1-w} \right) + a_1 = 0, \quad a_0(1+w) + a_1(1-w) = 0;$$

$$(a_0 - a_1)w + a_0 + a_1 = 0;$$

$$m = 2. \quad D(z) = a_0 z^2 + a_1 z + a_2 = 0;$$

$$a_0 \left(\frac{1+w}{1-w} \right)^2 + a_1 \left(\frac{1+w}{1-w} \right) + a_2 = 0,$$

чи

$$a_0(1+2w+w^2) + a_1(1-w^2) + a_2(1-2w+w^2) = 0.$$

Остаточно одержуємо

$$(a_0 - a_1 + a_2)w^2 + 2(a_0 - a_2)w + (a_0 + a_1 + a_2) = 0.$$

Звідси умови стійкості для імпульсних САК порядку m .

$m = 1:$	$m = 2:$	$m = 3:$
$a_0 - a_1 > 0;$	$a_0 - a_1 + a_2 > 0;$	$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 > 0;$
$a_0 + a_1 > 0.$	$a_0 - a_2 > 0;$	$3(a_0 + a_3) - a_1 - a_2 > 0;$
	$a_0 + a_1 + a_2 > 0.$	$3(a_0 - a_3) + a_1 - a_2 > 0;$
		$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 > 0;$
		$a_0^2 - a_3^2 - a_0 a_2 + a_1 a_3 > 0.$

Приклад 2.11. Дослідити на стійкість за критерієм Гурвіца імпульсну САК з прикладу 2.4, де об'єкт має передатну функцію $W_0(p) = K_\varphi / p^2$,

Розв'язання. Дискретна передатна функція розімкнутої імпульсної системи

$$W_p(z) = \frac{K'_\varphi(z+1)}{z^2 - 2z + 1}, \quad \text{де } K'_\varphi = \frac{K_\varphi T_0^2}{2}.$$

Характеристичне рівняння замкнутої системи при охопленні одиничним зворотним зв'язком

$$z^2 - 2z + 1 + K'_\varphi(z+1) = 0,$$

чи

$$z^2 + (K'_\varphi - 2)z + 1 + K'_\varphi = 0;$$

$$a_0 = 1;$$

$$a_1 = K'_\varphi - 2;$$

$$a_2 = 1 + K'_\varphi$$

Перша умова критерію Гурвіца, тобто додатність коефіцієнтів, не виконується, тому що $a_0 - a_2 < 0$. Проте охоплення зворотним зв'язком у неперервній системі дозволяє одержати консервативну ланку

$$W_3(p) = \frac{K_\varphi}{p^2 + K_\varphi}.$$

Отже, введення імпульсної ланки в даному випадку робить замкнуту систему нестійкою. Дійсно, $a_0 = a_2$ тільки при $T_0 \rightarrow 0 (K'_\varphi = \frac{K_\varphi T_0^2}{2} \rightarrow 0)$. Щоб забезпечити стійкість такої системи, необхідно ввести коригувальний пристрій.

Алгебричний критерій стійкості Гурвіца, як правило, застосовується для дослідження імпульсних систем, порядок яких не вище четвертого.

Література: [1, с. 529-532].

СРС: Аналог критерію стійкості Найквіста для імпульсних САК.

Література: [1, с. 533-534].

Контрольні запитання:

1. Запишіть аналітичний вираз для оператора z та поясніть його дію на решітчасту функцію.
2. Покажіть на z -площині можливе розташування коренів характеристичного рівняння стійкої імпульсної САК 5-го порядку.
3. Сформулюйте кореневий критерій стійкості імпульсних систем.
4. Сформулюйте критерій стійкості Гурвіца для імпульсних систем.
5. Як записується головний визначник Гурвіца?

Тема 2.8 Псевдочастотні логарифмічні характеристики імпульсних САК

2.8.1 Поняття про псевдочастотне перетворення

Аналіз та синтез імпульсних систем, як і безперервних, зручно здійснювати за допомогою логарифмічних частотних характеристик. Уведемо поняття псевдочастоти, оскільки логарифмічні характеристики імпульсних систем будуються, як правило, у функції псевдочастоти ($\bar{\lambda}$ чи λ – відносної чи абсолютної відповідно). При цьому логарифмічні псевдочастотні характеристики імпульсних САК зберігають властивості логарифмічних частотних характеристик неперервних систем.

Для переходу до псевдочастоти використовується білінійне перетворення, яке має назву w -перетворення або перетворення Мьобіуса

$$W(z) \Rightarrow W(w) \text{ при } z = \frac{1+w}{1-w} \text{ чи } W(w) \Rightarrow W(z) \text{ при } w = \frac{z-1}{z+1}. \quad (2.64)$$

Розглянемо докладніше w -перетворення. Переходячи до частотної функції $z = e^{j\omega T_0}$, одержуємо

$$w = \frac{e^{j\omega T_0} - 1}{e^{j\omega T_0} + 1} = jtg \frac{\omega T_0}{2} = j\bar{\lambda}, \quad (2.65)$$

де $\bar{\lambda} = tg \frac{\omega T_0}{2}$ – відносна псевдочастота. Вираз (2.65) отримано на підставі наступних математичних викладок.

Запишемо співвідношення

$$\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{shx}{chx}.$$

На основі цих співвідношень, при $2x = j\omega T_0$, $x = j\omega T_0/2$, отримаємо

$$w = \frac{e^{j\omega T_0} - 1}{e^{j\omega T_0} + 1} = \frac{\operatorname{sh} j \frac{\omega T_0}{2}}{\operatorname{ch} j \frac{\omega T_0}{2}}.$$

Враховуючи, що $\operatorname{sh} jx = j \sin x$, $\operatorname{ch} jx = \cos x$, матимемо

$$w = \frac{j \sin \frac{\omega T_0}{2}}{\cos \frac{\omega T_0}{2}} = j \operatorname{tg} \frac{\omega T_0}{2}.$$

Частіше використовується поняття абсолютної псевдочастоти

$$\lambda = \frac{2}{T_0} \operatorname{tg} \frac{\omega T_0}{2} = \frac{2}{T_0} \bar{\lambda}. \quad (2.66)$$

За допомогою підстановки $w = j\lambda \frac{T_0}{2}$ здійснюється перехід $W(w) \Rightarrow W(j\lambda)$.

При малих частотах $\operatorname{tg} \frac{\omega T_0}{2} \approx \frac{\omega T_0}{2}$ і псевдочастота $\lambda \approx \omega$. При зміні частоти в інтервалі $-\frac{\pi}{T_0} \leq \omega \leq \frac{\pi}{T_0}$ псевдочастота змінює свої значення в межах $-\infty \leq \lambda \leq +\infty$, а комплексна величина w рухається по осі уявних частот в межах $-j\infty \leq w \leq +j\infty$.

2.8.2 Побудова логарифмічних псевдочастотних характеристик елементарних ланок

Розглянемо методику побудови логарифмічних псевдочастотних характеристик елементарних імпульсних ланок на прикладі однієї з типових ланок, структурна схема якої зображена на рис. 2.28.

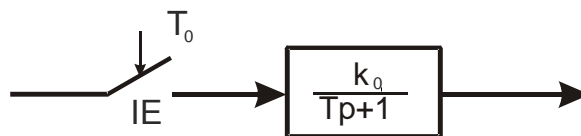


Рис. 2.28. Структурна схема імпульсної ланки

Для даної імпульсної аперіодичної ланки 1-го порядку або імпульсної інерційної ланки треба побудувати логарифмічну амплітудну і фазову характеристики при наступних значеннях параметрів: $k_0 = 10$; $T = 1$ с; $T_0 = 0,5$ с; $\gamma = 0,2$.

В загальному випадку перед побудовою логарифмічних псевдочастотних характеристик ланки треба виконати такі три дії:

- 1) отримати дискретну передатну функцію ланки $W(p) \Rightarrow W(z)$ одним із відомих способів;
- 2) виконати w -перетворення $W(z) \Rightarrow W(w)$;
- 3) отримати псевдочастотну передатну функцію $W(w) \Rightarrow W(j\lambda)$.

Отже виконаємо ці дії.

- 1) Дискретна передатна функція досліджуваної ланки, отримана за таблицею z -перетворень, має вигляд

$$W(z) = \frac{k_1 z}{z - d}, \quad (2.67)$$

де $k_1 = \frac{k_0 \gamma T_0}{T} = 1$; $d = e^{-T_0/T} = 0,607$.

- 2) Виконаємо w -перетворення для $W(z)$, використовуючи підстановку $z = \frac{1+w}{1-w}$:

$$W(w) = k_1 \frac{\frac{1+w}{1-w}}{\frac{1+w}{1-w} - d} = k_1 \frac{(1+w)}{1+w-d(1-w)} = \frac{k_1(1+w)}{1-d+(1+d)w} = \frac{k_1}{1-d} \cdot \frac{1+w}{1+\frac{1+d}{1-d}w}.$$

- 3) Переходячи у $W(w)$ до абсолютної псевдочастоти шляхом заміни $w = j\lambda \frac{T_0}{2}$, одержуємо

$$W(j\lambda) = \frac{k_1}{(1-d)} \cdot \frac{1+\frac{T_0}{2}j\lambda}{\left(1+\frac{T_0}{2}\frac{1+d}{1-d}j\lambda\right)} = k_2 \cdot \frac{1+\frac{T_0}{2}j\lambda}{(1+T_1j\lambda)} = \frac{2,54(1+0,25j\lambda)}{(1+1,02j\lambda)},$$

$$\text{де } T_1 = \frac{T_0(1+d)}{2(1-d)} = \frac{0.5(1+0,607)}{2(1-0,607)} \approx 1,02 \text{ с}, \quad k_2 = \frac{k_1}{1-d} = \frac{1}{1-0,607} \approx 2,54.$$

Порівнюючи $W(p)$ та $W(j\lambda)$, бачимо, що знаменники в них майже однакові (сталі часу відрізняються лише на 2%), а істотна відмінність чисельників відображає дію імпульсного елемента та фіксатора.

Побудуємо за $W(j\lambda)$ логарифмічні амплітудну та фазову псевдочастотні характеристики ланки, що зображені на рис. 2.29.

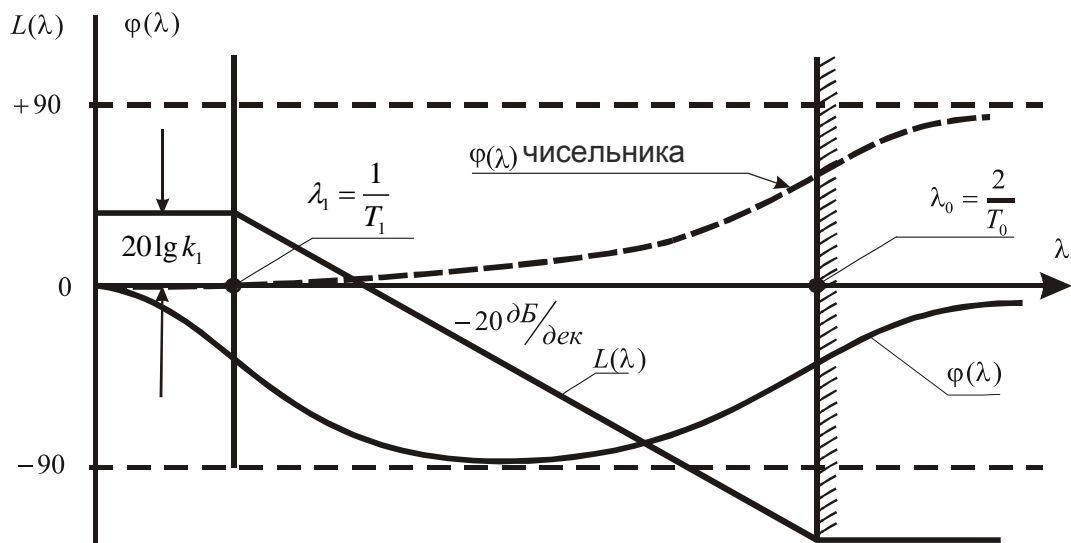


Рис. 2.29. Псевдочастотні ЛАХ та ЛФХ імпульсної ланки

Аналізуючи отримані характеристики, переконуємося, що імпульсна ланка у великому діапазоні частот має властивості інерційної ланки. Але в області частот $\lambda > \lambda_0 = 2/T_0$ вона інерційні властивості втрачає і веде себе як пропорційна ланка.

2.8.3 Критерій Найквіста в логарифмічній формі для імпульсних систем

Застосування критерію Найквіста в логарифмічній формі для імпульсних САК ґрунтується на використанні логарифмічних псевдочастотних характеристик. Тут, як і в неперервних САК, формулювання критерію має два варіанти, що відповідають випадкам стійкої та нестійкої розімкнутих систем.

Критерій Найквіста для 1-го варіанту: якщо розімкнута імпульсна система стійка або нейтральна, то для стійкості замкнутої системи необхідно і достатньо, щоб логарифмічна амплітудна характеристика $L(\lambda)$ розімкнутої САК перетинала вісь абсцис раніше, ніж її фазова характеристика $\varphi(\lambda)$ в останній раз перетинає вісь $-\pi$.

На рис. 2.30 демонструється застосування критерію Найквіста в логарифмічній формі для варіанту стійкої розімкнутої імпульсної системи.

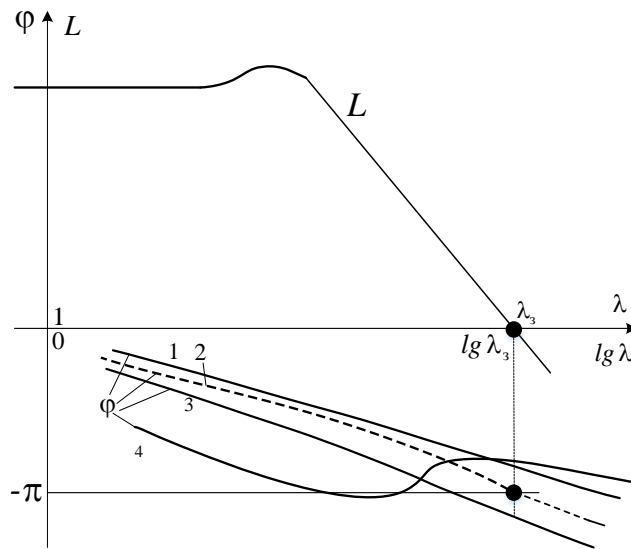


Рис. 2.30. Ілюстрація застосування критерію Найквіста в логарифмічній формі для варіанту стійкої розімкнутої САК

За допомогою сформульованого вище 1-го варіанту критерію Найквіста можна зробити висновок, що на рис. 2.30 із 4-х фазових характеристик криві 1, 4 відповідають стійким замкнутим системам, крива 3 відповідає нестійкій замкнутій системі, а крива 2 відповідає замкнутій системі на межі стійкості.

Критерій Найквіста для 2-го варіанту: якщо розімкнута імпульсна система нестійка і її характеристичне рівняння має r коренів за межами одиничного кола, то для стійкості замкнутої системи необхідно і достатньо, щоб при додатній логарифмічній амплітудній характеристиці розімкнутої системи $L(\lambda) > 0$ сума від'ємних та додатних перетинів її фазовою характеристикою $\varphi(\lambda)$ рівня $-\pi$ дорівнювала $r/2$, де від'ємними вважаються перетини знизу

вгору, а додатними – зверху вниз. При цьому асимптотичне наближення фази знизу до рівня $-\pi$ вважається за $-1/2$, а зверху – за $+1/2$ перетину.

Випадок астатичних розімкнутих САК. В астатичних (нейтральних) розімкнутих системах псевдочастотна передатна функція має один або більше нульовий полюс і може бути записана у вигляді

$$W_p(j\lambda) = \frac{B(j\lambda)}{C(j\lambda)} = \frac{B(j\lambda)}{(j\lambda)^v C_1(j\lambda)},$$

де v – кількість інтегровальних ланок у контурі. В цьому разі при застосуванні 2-го варіанту критерію Найквіста фазову характеристику системи слід модифікувати за рахунок т. з. «доповнення у нескінченності», що полягає у збільшенні фази при $\lambda \rightarrow 0$ асимптотично на $v\pi/2$. По суті таке доповнення фази відповідає заміні кожного інтегратора аперіодичною ланкою 1-го порядку з нескінченно великою сталою часу. Коректність цієї заміни обґрунтовується наступним граничним переходом:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{Tp + 1} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{p + 1/T} = \frac{1}{p}.$$

Рис. 2.31, а демонструє застосування критерію Найквіста в логарифмічній формі для варіанту нестійкої розімкнутої імпульсної системи при $r = 1$,

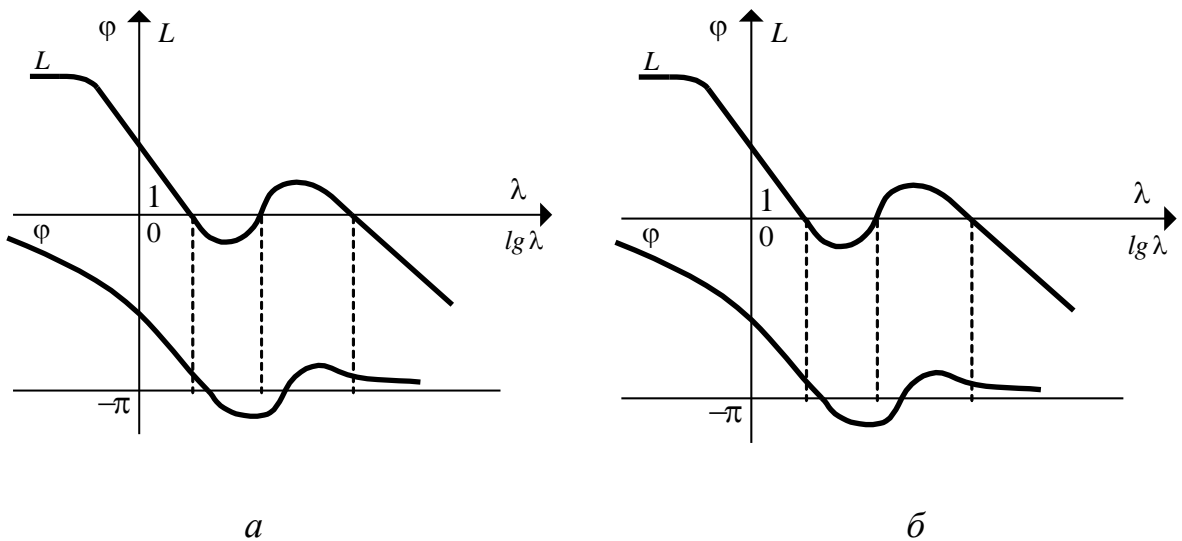


Рис. 2.31. Ілюстрація застосування критерію Найквіста для варіанту нестійкої розімкнутої системи при кількості нестійких коренів $r = 1$ (а) та $r = 2$ (б)

а на рис. 2.31, б – при $r = 2$. За допомогою сформульованого вище 2-го варіанту критерію Найквіста можна зробити висновок, що в обох випадках замкнута імпульсна САК є стійкою.

Література: [1, с. 527-529; 535-537].

СРС: Задачі для самостійного розв'язання: Задача 2 [5, с. 51].

Література: [5, с. 50-51].

Контрольні запитання:

1. Запишіть вираз для білінійного перетворення (w -перетворення).
2. Наведіть послідовність переходу від дискретної передатної функції $W(z)$ до псевдочастотної передатної функції $W(j\lambda)$.
3. Запишіть послідовність переходу від псевдочастотної передатної функції $W(j\lambda)$ до дискретної передатної функції $W(z)$.
4. Як пов'язані між собою абсолютна λ та відносна $\bar{\lambda}$ псевдочастоти?
5. Сформулюйте критерій Найквіста у логарифмічній формі для стійкої розімкнутої імпульсної САК.
6. Сформулюйте критерій Найквіста у логарифмічній формі для нестійкої розімкнутої імпульсної САК.
7. У чому особливість застосування критерію Найквіста у логарифмічній формі для астатичних імпульсних САК?

Тема 2.9 Якість імпульсних САК

В імпульсних системах, так само як і в неперервних, якість керування оцінюється точністю роботи в усталених режимах та показниками якості перехідних процесів за типових входних і збурювальних дій.

2.9.1 Точність імпульсних систем в усталених режимах

В загальному випадку усталену помилку імпульсної САК можна визначити як і в неперервних системах – знайти зображення помилки і відшукати її усталене значення. На рис. 2.32 зображена структурна схема

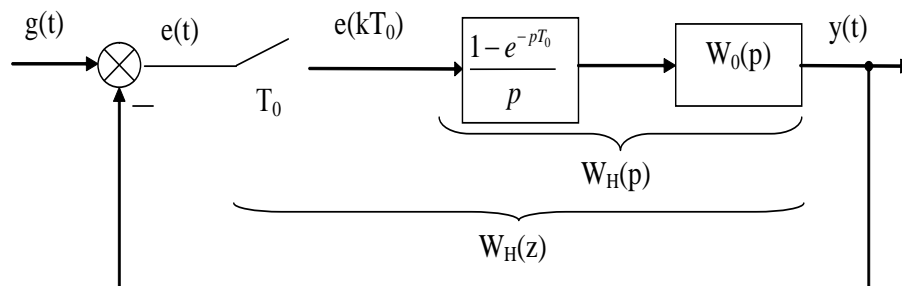


Рис. 2.32. Структурна схема імпульсної САК

імпульсної САК. Її дискретна передатна функція за помилкою має вигляд

$$W_e(z) = \frac{E(z)}{G(z)} = \frac{1}{1 + W(z)}, \quad (2.68)$$

де $G(z)$, $E(z)$ – відповідно z -зображення завдання та помилки системи; $W(z)$ – передатна функція розімкнутої САК. Згідно з (2.68) зображення помилки дорівнює

$$E(z) = W_e(z)G(z). \quad (2.69)$$

Використовуючи властивість z -перетворення для кінцевого значення оригіналу, усталене значення дискретної помилки $e^*(t) = e(kT_0)$ можна визначити, як

$$e_{ycm}^* = \lim_{k \rightarrow \infty} e(kT_0) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} W_e(z) G(z). \quad (2.70)$$

За (2.70) можна визначити усталену помилку для будь-якого сигналу завдання $g(kT_0)$ за умови існування границі у правій частині виразу.

Якщо усталена помилка САК за наявності будь-якої зовнішньої дії дорівнює нулю, то така система, як безперервна так і дискретна, називається *астатичною* відносно цієї дії. В іншому разі система називається *статичною*. САК, астатичні щодо постійної зовнішньої дії, називаються системами з *астатизмом 1-го порядку*. САК, астатичні щодо лінійно-змінюваної зовнішньої дії, називаються системами з *астатизмом 2-го порядку* і т.д.

Точність імпульсної САК в усталених режимах може оцінюватися за коефіцієнтами помилок. За аналогією з неперервними системами, усталену дискретну помилку можна записати у вигляді ряду

$$e_{ycm}^* = C_0 g(kT_0) + C_1 g'(kT_0) + \frac{C_2}{2} g''(kT_0) + \dots, \quad (2.71)$$

де C_0 – коефіцієнт статичної помилки, C_1 – коефіцієнт швидкісної помилки, C_2 – коефіцієнт помилки за прискоренням. Коефіцієнти помилок визначаються шляхом розкладання передатної функції за помилкою у ряд Маклорена за формулою

$$C_k = \left[\frac{d^k W_e^*(p)}{dp^k} \right]_{p=0}, \quad (2.72)$$

де $W_e^*(p) = W_e(z) \Big|_{z=e^{T_0 p}}$.

Величини, обернені до коефіцієнтів помилок, так само як і в неперервних системах, називаються добротностями. Зокрема, добротність системи за швидкістю

$$K_v = 1/C_1,$$

а добротність системи за прискоренням

$$K_a = 2/C_2.$$

Визначимо точність імпульсної САК в усталених режимах за типових зовнішніх дій.

а) Стрибкоподібне постійне завдання $g(t) = g_0 \cdot 1(t)$, $g_0 = const$. Такий зовнішній дії відповідає статичний режим роботи САК. Для відповідної завданню решітчастої функції $g(kT_0) = g_0 \cdot 1(kT_0)$ знайдемо за табл. 2.1 зображення $G(z) = Z\{1(kT_0)g_0\} = g_0 z / (z - 1)$. Підставивши $G(z)$ у (2.70), отримаємо вираз для статичної помилки системи

$$e_{ycm}^* = \frac{g_0}{1 + K_p}, \quad (2.73)$$

де K_p – коефіцієнт передачі розімкненої системи, що дорівнює

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} W(z). \quad (2.74)$$

б) Лінійно-змінюване завдання $g(t) = vt$, де швидкість $v = const$. Решітчастій функції $g(kT_0) = vkT_0$ згідно з табл. 2.1 відповідає зображення $G(z) = Z\{vkT_0\} = vT_0 z / (z - 1)^2$. Підставивши $G(z)$ у (2.70), отримаємо вираз для швидкісної помилки

$$e_{ycm}^* = v / K_v, \quad (2.75)$$

де добротність системи за швидкістю дорівнює

$$K_v = T_0^{-1} \lim_{z \rightarrow 1} [(z - 1)W(z)]. \quad (2.76)$$

в) Квадратично-змінюване завдання $g(t) = at^2/2$, де прискорення $a = const$. Для решітчастої функції $g(kT_0) = a(kT_0)^2/2$ згідно з табл. 2.1 визначимо зображення завдання $G(z) = Z\{a(kT_0)^2/2\} = aT_0^2 z(z + 1) / 2(z - 1)^3$. Підставивши $G(z)$ у (2.70), маємо вираз для усталеної помилки

$$e_{ycm}^* = a / K_a, \quad (2.77)$$

де добротність системи за прискоренням дорівнює

$$K_a = T_0^{-2} \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)^2 W(z)]. \quad (2.78)$$

Приклад 2.13. Розімкнута імпульсна САК має передатну функцію $W(z) = \frac{0,225z^2 + 0,1125z - 0,1125}{z(z-1)^2}$ при періоді квантування $T_0 = 0,03 \text{ с}$. На вхід замкнутої системи подається завдання $g(t) = g_0 \cdot 1(t) + vt + at^2/2$, де $g_0 = 10 \text{ рад}$, $v = 100 \text{ рад/с}$, $a = 50 \text{ рад/с}^2$. Необхідно визначити усталену помилку системи при відпрацюванні цього завдання.

Розв'язання. Використовуючи (2.74), (2.76) та (2.78) визначимо відповідно коефіцієнт передачі, добротність за швидкістю та добротність за прискоренням: $K_p = \infty$, $K_v = \infty$, $K_a = 250 \text{ с}^{-2}$.

Оскільки завданням САК є сума постійної, лінійної та квадратичних складників, то, згідно із принципом суперпозиції, результуюча усталена помилка системи буде сумою усталених помилок від кожного із цих складників. На основі виразів (2.73), (2.75) та (2.77) її можна обчислити як

$$e_{уст}^* = \frac{g_0}{1 + K_p} + \frac{v}{K_v} + \frac{a}{K_a} = \frac{10 \text{ рад}}{\infty} + \frac{100 \text{ рад/с}}{\infty} + \frac{50 \text{ рад/с}^2}{250 \text{ с}^{-2}} = 0,2 \text{ рад}.$$

2.9.2 Якість імпульсних систем в перехідних процесах

В імпульсних системах використовуються такі самі показники якості перехідних процесів, як і в неперервних системах. До найважливіших з них відносяться тривалість перехідного процесу, перерегулювання та ступінь затухання. Ці показники якості визначаються за перехідною характеристикою, що являє собою реакцію системи на одиничну стрибкоподібну дію за нульових початкових умов. Перехідна характеристика може бути отримана аналі-

тично або чисельно – шляхом розв’язання рівняння динаміки замкнутої САР чи шляхом моделювання.

В першому разі зручно використовувати метод z -перетворення. При стрибкоподібному завданні, зображення якого $G(z) = z/(z-1)$, вихідна величина САК із представленою на рис. 2.32 схемою матиме зображення

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} W_s(z), \quad (2.79)$$

де $W_s(z) = \frac{W(z)}{1+W(z)}$ – дискретна передатна функція замкнутої системи. Оригінал зображення (2.79) являтиме собою решітчасту функцію $y(kT_0) = Z^{-1}\{Y(z)\}$. Показники якості можна визначити за графіком дискретної перехідної характеристики $y(kT_0)$ або відповідної їй безперервної функції $y(t)$. Очевидно, що другий варіант є дещо точнішим.

Для оцінювання якості перехідних процесів можна використовувати наближені методи, зокрема кореневі. Вільний рух системи визначається коренями її характеристичного рівняння. При цьому крива перехідного процесу є сумою складових від кожного кореня z_i . На комплексній z -площині, що зображена на рис. 2.33, дійсний додатний корінь породжує експоненціальну, пара комплексно-спряжених коренів – коливальну, а дійсний від’ємний корінь – знакозмінну затухаючі складники перехідного процесу.

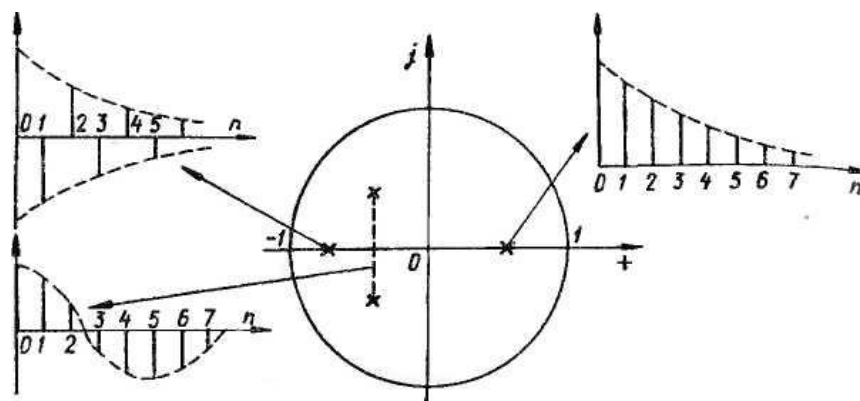


Рис. 2.33. Розташування коренів на z -площині та відповідні їм складники перехідного процесу

Якість імпульсних систем, за аналогією з неперервними, можна характеризувати непрямими оцінками: кореневими та інтегральними.

Кореневі оцінки якості. Кореневими оцінками якості імпульсної системи є ступінь стійкості η та коливальності μ . Якщо в записаному на основі дискретного перетворення Лапласа характеристичному рівнянні системи n -го порядку у вигляді

$$D^*(p) = a_0 e^{nT_0 p} + a_1 e^{(n-1)T_0 p} + \dots + a_{n-1} e^{T_0 p} + a_n = 0 \quad (2.80)$$

відшукати найближчий до уявної осі комплексної p -площини корінь $p_{i,i+1} = \alpha_i \pm \beta_i$, то ступінь стійкості системи визначатиметься абсолютною величиною дійсної частини цього кореня, тобто

$$\eta = |\alpha|_{\min}. \quad (2.81)$$

При переході до відносного часу введенням заміни $T_0 p = q$, відносний ступінь стійкості обчислюватиметься як

$$\bar{\eta} = |\alpha T_0|_{\min}. \quad (2.82)$$

За аналогією з неперервними системами можна записати вираз для оцінки часу перехідного процесу t_p як

$$t_p \leq 3/\eta = 3T_0/\bar{\eta}. \quad (2.83)$$

Проте за великих η ця оцінка стає невірною.

Оцінкою коливальних властивостей системи є ступінь коливальності μ . Для імпульсних САК він визначається як модуль найбільшого відношення уявної до дійсної частин коренів рівняння $D^*(p) = 0$

$$\mu = |\beta/\alpha|_{\max}. \quad (2.84)$$

Інтегральні оцінки якості. Дані оцінки враховують час перехідного процесу та динамічне відхилення керованої величини від усталеного значення. Лінійна інтегральна оцінка визначається як

$$I_1 = \sum_{k=0}^{\infty} [y_{уст} - y(k)], \quad (2.85)$$

де $y_{уст} = \lim_{k \rightarrow \infty} y(k)$ – усталене значення виходу. Ця оцінка використовується для процесів без перерегулювання. Для довільного характеру перехідних процесів застосовується квадратична інтегральна оцінка

$$I_2 = \sum_{k=0}^{\infty} [y_{уст} - y(k)]^2. \quad (2.86)$$

Чим менші інтегральні оцінки якості тим кращою є імпульсна САК.

Література: [1, с. 537-543].

СРС: Перехідні процеси скінченної тривалості.

Література: [1, с. 541-542].

Контрольні запитання:

1. Запишіть формулу для отримання дискретної передатної функції імпульсної системи за помилкою.
2. Як визначити точність імпульсної САК у статиці?
3. Як оцінюється точність імпульсної САК в усталених режимах?
4. Як визначити за передатною функцією імпульсної системи її коефіцієнт передачі, добротності за швидкістю та за прискоренням?
5. Поясніть, як характер складників вільного руху імпульсної САК пов'язаний з розташуванням коренів характеристичного рівняння системи?
6. Якими є кореневі показники якості перехідних процесів імпульсної системи?
7. Висвітліть особливості застосування інтегральних оцінок якості імпульсної САК.

Тема 2.10 Цифрові САК

2.10.1 Загальні принципи побудови цифрових САК

САК, до складу якої входить цифрова обчислювальна машина (ЦОМ) або спеціалізований цифровий обчислювальний пристрій (ЦОП), називається цифровою САК. Зазвичай ЦОМ потрібно вводити у САК, якщо для її функціонування потрібна досить складна обробка інформації. Це стосується формування складних траєкторій завдання для систем програмного керування, реалізації нелінійних, адаптивних чи інтелектуальних алгоритмів керування тощо.

Узагальнена структурна схема цифрової САК представлена на рис. 2.34. Вона містить неперервну частину у складі об'єкта керування (ОК) та

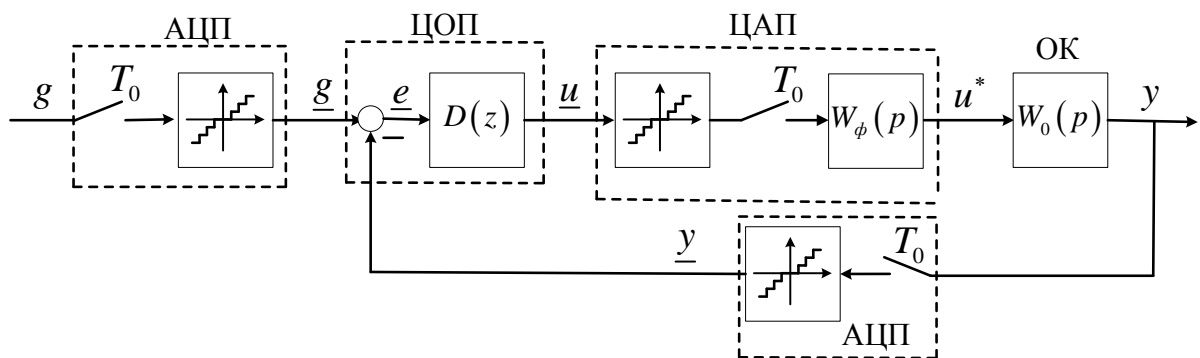


Рис. 2.34. Узагальнена структурна схема цифрової системи автоматичного керування

фіксатора, і цифрову частину у складі ЦОП, двох аналого-цифрових перетворювачів (АЦП) та цифро-аналогового перетворювача (ЦАП) за винятком фіксатора. На схемі символами, що підкреслені знизу, позначені машинні значення або цифрові коди величин.

У зображеній на рис. 2.34 схемі ЦОП відіграє роль цифрового регулятора. Він здійснює обчислення з метою реалізації певного алгоритму керу-

вання, що відповідає передатній функції $D(z)$. Виконання обчислень триває деякий інтервал часу $\tau_{\text{ЦОП}}$, який залежить від складності алгоритму керування та швидкодії ЦОП. Тому ЦОП вносить певне часове запізнення в систему керування.

На вхід ЦОП із виходу керованого об'єкта надходить аналогова інформація у вигляді напруги, струму і т.п. Тому цифрова система повинна здійснювати перетворення аналогових сигналів у цифровий код за допомогою АЦП. Цей процес перетворення умовно можна розподілити на три етапи: квантування за часом, квантування за рівнем і кодування.

2.10.2 Квантування, кодування та екстраполяція сигналів у цифрових САК

Квантування за часом відповідає фіксації миттєвих значень безперервної функції $y(t)$ в дискретні моменти часу kT_0 , де $k = 0, 1, 2, \dots$, T_0 – період квантування. Ефект квантування за часом на схемі відображено наявністю у ланцюзі сигналу $y(t)$ ключа (ідеального імпульсного елемента). На виході ключа утворюється решітчаста функція $y(kT_0)$ з неперервної функції $y(t)$.

Квантування за рівнем полягає в заміні миттєвих значень $y(kT_0)$ найближчими дискретними значеннями $\underline{y}(kT_0)$ у відповідності зі статичною характеристикою АЦП, яка зображена на рис. 2.35 і являє собою

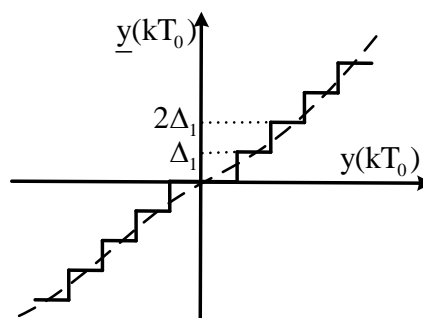


Рис. 2.35. Статична характеристика АЦП

багатосхідчасту релейну характеристику. Кількість сходинок цієї характеристики $\mu_1 = 2^{\alpha_1} - 1$ визначається кількістю α_1 двійкових розрядів АЦП. При

квантуванні за рівнем вхідний безперервний сигнал розбивається на сукупність рівних величин або квантів Δ_1 , що дорівнює

$$\Delta_1 = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2^{\alpha_1} - 1}, \quad (2.87)$$

де y_{\max}, y_{\min} – максимальне та мінімальне значення вхідного сигналу. Значення Δ_1 , яке називають ціною молодшого розряду, характеризує роздільну здатність АЦП.

Процес кодування полягає у перетворенні послідовності імпульсних сигналів $y(kT_0)$ у цифровий код ЦОП $\underline{y}(kT_0)$. За достатньо великої кількості розрядів α_1 нелінійну характеристику АЦП можна лінеаризувати. В цьому разі коефіцієнт передачі АЦП дорівнюватиме

$$k_{\text{АЦП}} \approx 1/\Delta_1. \quad (2.88).$$

Перетворення інформації в АЦП триває певний інтервал часу $\tau_{\text{АЦП}}$, що вносить відповідне часове запізнення у замкнутий контур САК.

ЦОП, відповідно до закладеної програми, здійснює перетворення вхідних сигналів у вихідні. При цьому на кожному такті відбувається порівняння коду керованої величини $\underline{y}(kT_0)$ із кодом завдання $\underline{g}(kT_0)$ та визначається код помилки системи

$$\underline{e}(kT_0) = \underline{g}(kT_0) - \underline{y}(kT_0).$$

Отримувана на виході ЦОП величина $\underline{u}(kT_0)$ являється *цифровим кодом* сигналу керування. Оскільки об'єкт керування безперервний, то на нього слід подавати неперервний сигнал керування, для чого використовують ЦАП. Взагалі процес перетворення цифрового коду в неперервний сигнал містить у собі дві операції:

1) декодування – перетворення числового коду $\underline{u}(kT_0)$ в імпульсний сигнал $u(kT_0)$ з амплітудною модуляцією;

2) екстраполяція – перетворення імпульсного сигналу $u(kT_0)$ в безперервний сигнал $u^*(t)$.

Процес декодування супроводжується квантуванням сигналів $\underline{u}(kT_0)$ за рівнем у відповідності зі статичною характеристикою ЦАП, яка зображена на рис. 2.36.

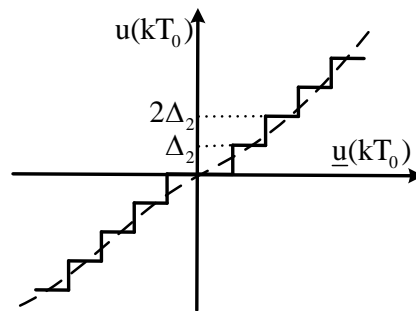


Рис. 2.36. Статична характеристика ЦАП

Число рівнів статичної характеристики визначається співвідношенням

$$\mu_2 = 2^{\alpha_2} - 1,$$

де α_2 – кількість двійкових розрядів, Δ_2 – ціна молодшого розряду ЦАП.

Значення Δ_2 , яке визначає роздільну здатність ЦАП, дорівнює

$$\Delta_2 = \frac{u_{\max} - u_{\min}}{2^{\alpha_2} - 1}, \quad (2.89)$$

де u_{\max}, u_{\min} – максимальне та мінімальне значення вихідного сигналу.

За достатньо великої кількості розрядів α_2 нелінійну характеристику ЦАП можна лінеаризувати. В цьому разі коефіцієнт передачі ЦАП дорівнюватиме

$$k_{\text{ЦАП}} \approx \Delta_2. \quad (2.90)$$

Процес декодування в ЦАП триває певний інтервал часу $\tau_{\text{ЦАП}}$, що вносить відповідне часове запізнення в цифрову САК.

Зазначимо, що зазвичай $\alpha_1 > \alpha_2$, що пояснюється складністю апаратної реалізації високорозрядних ЦАП. Типовими значеннями для α_1 є 10 або 12, а для α_2 – 8 або 10.

Процес екстраполяції, як правило, являє собою фіксацію вихідного дискретного сигналу ЦОП на одному рівні протягом періоду T_0 , що відповідає екстраполатору (фіксатору) нульового порядку. Часом для згладжування використовують лінійну або квадратичну екстраполяцію.

Безперервний ОК разом із фіксатором ЦАП утворюють зведену неперервну частину або зведений ОК цифрової САК. При синтезі цифрового регулятора до зведеного ОК часто відносять коефіцієнти передачі лінеаризованих АЦП та ЦАП. Також сюди можна віднести сумарне часове запізнення цифрової частини $\tau_{\text{ц}} = \tau_{\text{АЦП}} + \tau_{\text{ЦОП}} + \tau_{\text{ЦАП}}$. У цьому разі передатна функція зведеного ОК матиме вигляд

$$W_H(p) = \Delta_1^{-1} \Delta_2 e^{-\tau_{\text{ц}} p} W_{\phi}(p) W_0(p). \quad (2.91).$$

Якщо $\tau_{\text{ц}} \ll T_0$, то часовим запізненням можна знехтувати, якщо ні – то його слід врахувати в дискретній моделі системи. Зазначимо, що врахування часового запізнення в дискретних системах набагато простіше ніж у неперервних.

Література: [1, с. 548-551], [2, с. 445-449].

СРС: Передатна функція формувача трикутних імпульсів.

Література: [1, с. 503-506].

Контрольні запитання:

1. Дайте визначення цифрової САК.
2. Нарисуйте узагальнену структурну схему цифрової САК та покажіть на ній неперервну та цифрову частини.
3. Для чого призначений ЦОП?
4. Опишіть процес перетворення аналогових сигналів у цифровий код.
5. Наведіть статичну характеристику АЦП та запишіть формулу для його коефіцієнта передачі.

6. Опишіть процес перетворення цифрового коду в неперервну величину.
7. Наведіть статичну характеристику ЦАП та запишіть формулу для його коефіцієнта передачі.
8. Які часові запізнення виникають у цифрових САК?
9. Як при синтезі враховують у зведеній неперервній частині особливості цифрової реалізації алгоритмів керування?

Тема 2.11. Синтез цифрових САК

2.11.1 Передатні функції та логарифмічні характеристики типових дискретних коригувальних ланок

Із наведеної на рис. 2.34 узагальненої схеми цифрової САК при $\alpha_1 = \alpha_2$ та $\tau_{\text{ц}} \ll T_0$ можна отримати спрощену структуру цифрової САК, що зображена на рис. 2.37, де ЦОП – цифровий обчислювальний пристрій, що реалізує дискретне коригування (регулювання); $D(z)$ – дискретна передатна функція коригувального пристрою; $W_H(p)$ – передатна функція зведеної неперервної частини системи.

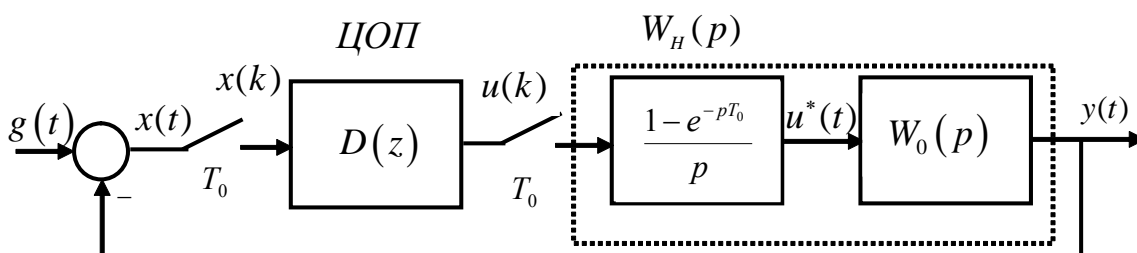


Рис. 2.37. Спрощена структурна схема цифрової САК

За допомогою ЦОП можна легко реалізувати усі відомі закони коригування та регулювання. Ланки, що найчастіше використовуються для коригування, є такими: 1) форсувальна; 2) форсувально-інерційна; 3) інтегровальна; 4) пропорційно-інтегровальна (ізодромна). За одиничного коефіцієнту підсилення їх передатні функції мають вигляд:

$$W_1(p) = 1 + Tp; \quad W_2(p) = \frac{1 + T_1 p}{1 + T_2 p}, \quad W_3(p) = \frac{1}{Tp}; \quad W_4(p) = 1 + \frac{1}{Tp},$$

де T, T_1, T_2 – сталі часу. Сума передатних функцій форсувальної та інтегровальної ланок являтиме собою пропорційно-інтегровально-диференціальний закон регулювання, який часто застосовується на практиці.

Як приклад отримання дискретного опису неперервного аналога розглянемо ідеальну форсувальну ланку з передатною функцією $W(p) = 1 + Tp$. Даній ланці відповідає диференціальне рівняння

$$u = x + T \, dx/dt, \quad (2.92)$$

де x, u – відповідно сигнали на вході та виході ланки. На основі методу скінченних різниць, перейшовши в (2.92) від неперервних до решітчастих функцій та замінивши похідну першою різницею, отримаємо різницеве рівняння

$$u(kT_0) = x(kT_0) + T \frac{[x(kT_0) - x((k-1)T_0)]}{T_0}, \quad (2.93)$$

де T_0 – період дискретності; $k = 0, 1, 2, \dots$. Запишемо (2.93) у відносному часі шляхом нормування змінних щодо T_0 у вигляді

$$u(k) = x(k) + \frac{T}{T_0} [x(k) - x(k-1)]. \quad (2.94)$$

Вираз (2.94) можна записати як

$$u(k) = a_1 [x(k) - ax(k-1)]. \quad (2.95)$$

де $a_1 = \frac{1}{1-a}$; $a = \frac{T}{T+T_0}$; $0 < a < 1$.

Отже ми отримали дискретний закон керування у вигляді різницевого рівняння (2.95). Його неперервним аналогом є закон керування (2.92), що відповідає ідеальній форсувальній ланці. Визначивши z -перетворення правої та лівої частин рівняння (2.95), отримаємо дискретну передатну функцію форсувальної ланки

$$D(z) = \frac{U(z)}{X(z)} = a_1 (1 - az^{-1}) = a_1 \left(\frac{z-a}{z} \right). \quad (2.96)$$

Тепер відшукаємо відповідну до (2.96) псевдочастотну передатну функцію. Спочатку виконаємо w -перетворення $D(z)$ за допомогою заміни $z = (1+w)/(1-w)$. Отримаємо

$$D(w) = a_1 \left(1 - a \frac{1-w}{1+w} \right) = a_1 \frac{1+w-a(1-w)}{1+w} = a_1 \frac{(1+a)w + 1 - a}{1+w}.$$

Після спрощення матимемо

$$D(w) = \frac{1 + \left(\frac{1+a}{1-a} \right) w}{1+w}.$$

Далі, підставляючи $w = j\lambda T_0/2$, отримаємо псевдочастотну передатну функцію

$$D(j\lambda) = \frac{1 + j\lambda\tau}{1 + j\lambda \frac{T_0}{2}}, \quad (2.97)$$

де $\tau = \frac{1+a}{1-a} \cdot \frac{T_0}{2} = T + \frac{T_0}{2}$. Для псевдочастотної передатної функції дискретної форсувальної ланки (2.97) побудуємо логарифмічні псевдочастотні характеристики, що зображені на рис. 2.38.

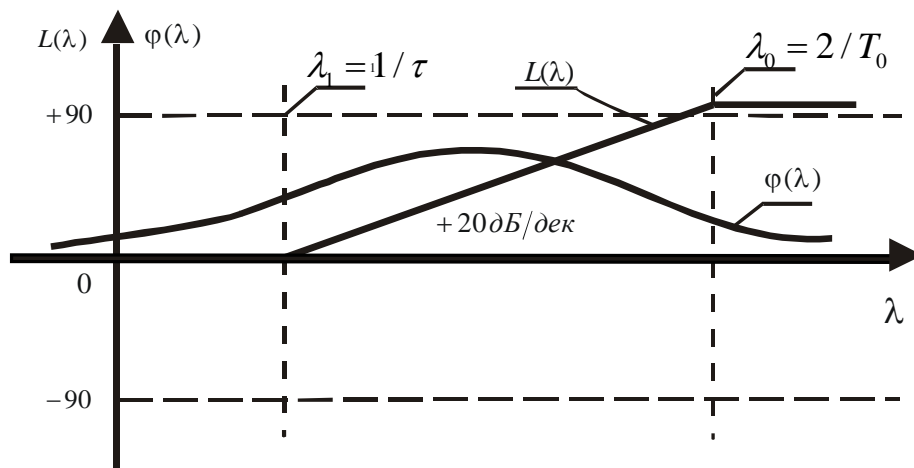


Рис. 2.38. Логарифмічні псевдочастотні характеристики форсувальної ланки

Наведені на рисунку характеристики свідчать про диференціювальні властивості дискретного коригувального пристрою в зоні частот $1/\tau < \lambda < 2/T_0$.

В табл. 2.3 наведено дискретні та псевдочастотні передатні функції цифрових послідовних коригувальних ланок та їх неперервні аналоги, що є простими та досить часто використовуються на практиці.

Таблиця 2.3. Передатні функції дискретних коригувальних ланок

Ланка (неперервний аналог)	Передатна функція	Дискретна передатна функція	Псевдочастотна передатна функція
Форсувальна ідеальна	$1 + Tp$	$\frac{1}{1-a} \cdot \frac{z-a}{z},$ $a = T/(T + T_0),$ $0 < a < 1$	$\frac{1 + j\lambda\tau}{1 + j\lambda\frac{T_0}{2}},$ $\tau = \frac{1+a}{1-a} \cdot \frac{T_0}{2},$ $a = \frac{2\tau - T_0}{2\tau + T_0}.$
Форсувальна реальна	$\frac{1 + T_1p}{1 + T_2p},$ $T_1 > T_2$	$\frac{1-b}{1-a} \cdot \frac{z-a}{z-b},$ $a = T_1/(T_1 + T_0),$ $b = T_2/(T_2 + T_0),$ $0 < a < 1,$ $0 < b < 1, a > b$	$\frac{1 + j\lambda\tau_1}{1 + j\lambda\tau_2},$ $\tau_1 = \frac{1+a}{1-a} \cdot \frac{T_0}{2},$ $\tau_2 = \frac{1+b}{1-b} \cdot \frac{T_0}{2}$
Інтегрувальна (метод прямокутників)	$\frac{k}{p} = \frac{1}{Tp}$	$\frac{a}{z-1},$ $a = T_0/T$	$\frac{a}{T_0} \cdot \frac{1 - j\lambda\frac{T_0}{2}}{j\lambda}$
Інтегрувальна (метод трапецій)	$\frac{k}{p} = \frac{1}{Tp}$	$\frac{a}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1},$ $a = T_0/T$	$\frac{a}{T_0} \cdot \frac{1}{j\lambda}$
Ізодромна (пропорційно інтегрувальна)	$k + \frac{1}{Tp} =$ $= \frac{1 + kTp}{Tp}$	$1 + \frac{kT}{T_0}(z-1)$ $\frac{T}{T_0}(z-1)$	$\frac{1 + j\lambda kT}{j\lambda T}$

2.11.2 Синтез цифрових регуляторів методом логарифмічних псевdochастотних характеристик

Розглянемо процедуру синтезу послідовного цифрового коригувального пристрою методом логарифмічних псевdochастотних характеристик на прикладі дискретної САК, структурна схема якої показана на рис. 2.39.

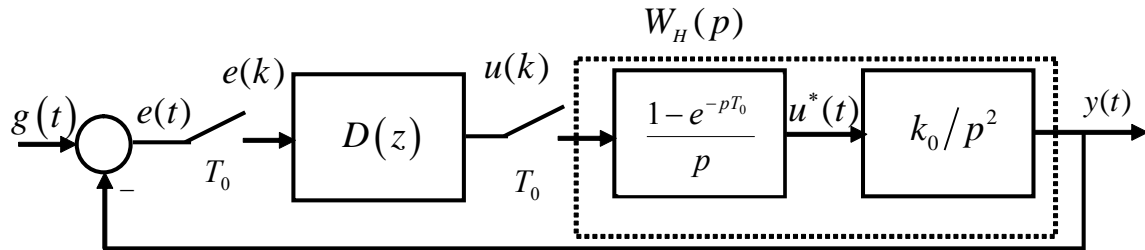


Рис. 2.39. Структурна схема дискретної САК, що синтезується

Передатна функція неперервного об'єкта

$$W_0(p) = \frac{k_0}{p^2},$$

де $k_0 = 100 \text{ c}^{-2}$. Вимоги до системи, що синтезується, задані у наступному вигляді: 1) точність в усталених режимах – при постійному та лінійно змінюваному завданні $g(t)$ помилка системи має бути нульовою; показники якості перехідного процесу – час регулювання $t_p \leq 0.35 \text{ c}$, перерегулювання $\sigma \leq 30\%$; умови стійкості – запаси стійкості за фазою та амплітудою мають бути $\Delta\varphi \geq 35^\circ$; $\Delta L \geq 6 \text{ дБ}$.

Розв'язання задачі синтезу. Знайдемо період квантування T_0 . Амплітудна частотна характеристика об'єкта має вигляд

$$A_0(\omega) = |W_0(j\omega)| = 100 / \omega^2.$$

Використовуючи викладену вище методику визначення періоду квантування, запишемо рівняння

$$A_0(\omega_{ep}) = 100 / \omega_{ep}^2 = 0.1,$$

розв'язавши яке, отримаємо $\omega_{zp} = 31.6 \text{ c}^{-1}$. Тепер визначимо T_0 як

$$T_0 \leq \frac{\pi}{3\omega_{zp}} = 0.033 \text{ c}.$$

Остаточно приймемо $T_0 = 0.02 \text{ c}$. Дискретну передатну функцію неперервної частини з урахуванням фіксатора нульового порядку отримаємо безпосередньо за таблицею z -перетворень. Вона має вигляд:

$$W_n(z) = \frac{K_0 T_0^2}{2} \frac{z+1}{(z-1)^2}.$$

Знайдемо псевдочастотну передатну функцію зведеної неперервної частини системи, використовуючи підстановки

$$z = \frac{1+w}{1-w}, \quad w = j\lambda \frac{T_0}{2}.$$

Після відповідних перетворень одержимо

$$W_n(j\lambda) = W_{вих}(j\lambda) = K_0 \frac{1 - j\lambda \frac{T_0}{2}}{(j\lambda)^2}.$$

Як видно, у чисельнику отриманої псевдочастотної передатної функції вихідної системи $W_{вих}(j\lambda)$ знаходиться немінімально-фазова ланка. Ця ланка відображає чисте часове запізнення, що властиве фіксатору нульового порядку. Вираз для фазової характеристики вихідної системи матиме вигляд

$$\varphi_{вих}(\lambda) = -\pi - \arctg(\lambda T_0 / 2).$$

Побудуємо логарифмічні амплітудну та фазову псевдочастотні характеристики вихідної системи, які показані на рис. 2.40. На основі критерію Найквіста можна зробити висновок, що вихідна замкнута система без коригувального пристрою *нестійка*.

Тепер побудуємо бажану ЛАХ. Виходячи із вимоги до точності системи в усталених режимах, низькочастотна ділянка бажаної ЛАХ повинна мати нахил -40 дБ/дек . Це забезпечить 2-й порядок астатизму системи за завдан-

ням і, відповідно, нульову усталену помилку при постійному та лінійно змінюваному завданні. Оскільки ЛАХ вихідної системи має потрібний нахил, то низькочастотні ділянки вихідної та бажаної ЛАХ можуть співпадати. Середньочастотна ділянка бажаної ЛАХ, як відомо, має проходити під кутом -20 дБ/дек. При цьому частоти, де відбувається зміна нахилу цієї ділянки, повинні відрізнятися від частоти зрізу як мінімум на 2-4 октави.

Запишемо бажану передатну функцію розімкнутої системи, пам'ятаючи про те правило синтезу, що немінімально-фазові ланки передатної функції вихідної САК мають бути включеними у бажану передатну функцію. Отже, залишаючи коефіцієнт підсилення скоригованої системи незмінним, отримаємо бажану передатну функцію у загальному вигляді як

$$W_{\text{баж}}(j\lambda) = K_0 \frac{(1 + j\lambda\tau) \left(1 - j\lambda \frac{T_0}{2}\right)}{(j\lambda)^2 \left(1 + j\lambda \frac{T_0}{2}\right)}.$$

Даній передатній функції відповідатиме вираз для фазової характеристики

$$\varphi_{\text{баж}}(\lambda) = -\pi + \operatorname{arctg} \lambda\tau - 2\operatorname{arctg}(\lambda T_0 / 2).$$

Для визначення частоти зрізу бажаної ЛАХ за наведеними в підручнику [1] кривими $k_\sigma = f(\sigma)$ виберемо $k_\sigma = 2.8$ та застосуємо формулу

$$\lambda_{zp} \geq \frac{k_\sigma \pi}{t_p} = 25.1 \text{ c}^{-1}.$$

Остаточно приймемо $\lambda_{zp} = 30 \text{ c}^{-1}$. Через точку $\lg 30 = 1.48$ дек проводимо пряму з нахилом -20 дБ/дек вліво – до перетину з $L_{\text{вих}}(\lambda)$, а вправо – без будь-яких зламів та обмежень. Таким чином отримаємо бажану ЛАХ, що зображена на рис. 2.40. ЛАХ коригувальної ланки $L_{\text{кп}}(\lambda)$ отримаємо шляхом графічного віднімання

$$L_{\text{кп}}(\lambda) = L_{\text{баж}}(\lambda) - L_{\text{вих}}(\lambda),$$

як це показано на рис. 2.40. Тепер на основі ЛАХ коригувальної ланки запишемо її псевдочастотну передатну функцію

$$W_{\kappa n}(j\lambda) = \frac{1 + j\tau\lambda}{1 + j\frac{T_0}{2}\lambda},$$

де $\tau = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{3.2} = 0.313 (с).$

Здійснюючи зворотний перехід за допомогою співвідношення $j\lambda = \frac{2}{T_0} \frac{z-1}{z+1}$, одержимо дискретну передатну функцію коригувального пристрою

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = a_1 \frac{z-a}{z},$$

де $a = \frac{2\tau - T_0}{2\tau + T_0}$, $a_1 = (1-a)^{-1}$. Рівняння цифрового регулятора матиме вигляд

$$u(k) = a_1 [e(k) - ae(k-1)].$$

Використовуючи записану вище формулу отримаємо ЛФХ бажаної системи $\varphi_{\text{баж}}(\lambda)$, а ЛФХ коригувальної ланки побудуємо за виразом $\varphi_{\text{кп}}(\lambda) = \varphi_{\text{баж}}(\lambda) - \varphi_{\text{вих}}(\lambda) = \arctg \lambda\tau - \arctg(\lambda T_0 / 2)$. Ці характеристики зображені на рис. 2.40.

За ЛАХ та ЛФХ бажаної системи визначимо запаси стійкості за фазою та амплітудою, як це показано на рис. 2.40. Вони відповідно дорівнюють: $\Delta\varphi = 45^\circ$; $\Delta L = 9 \text{ дБ}$. Отже, синтезована замкнена цифрова система має необхідні умови стійкості.

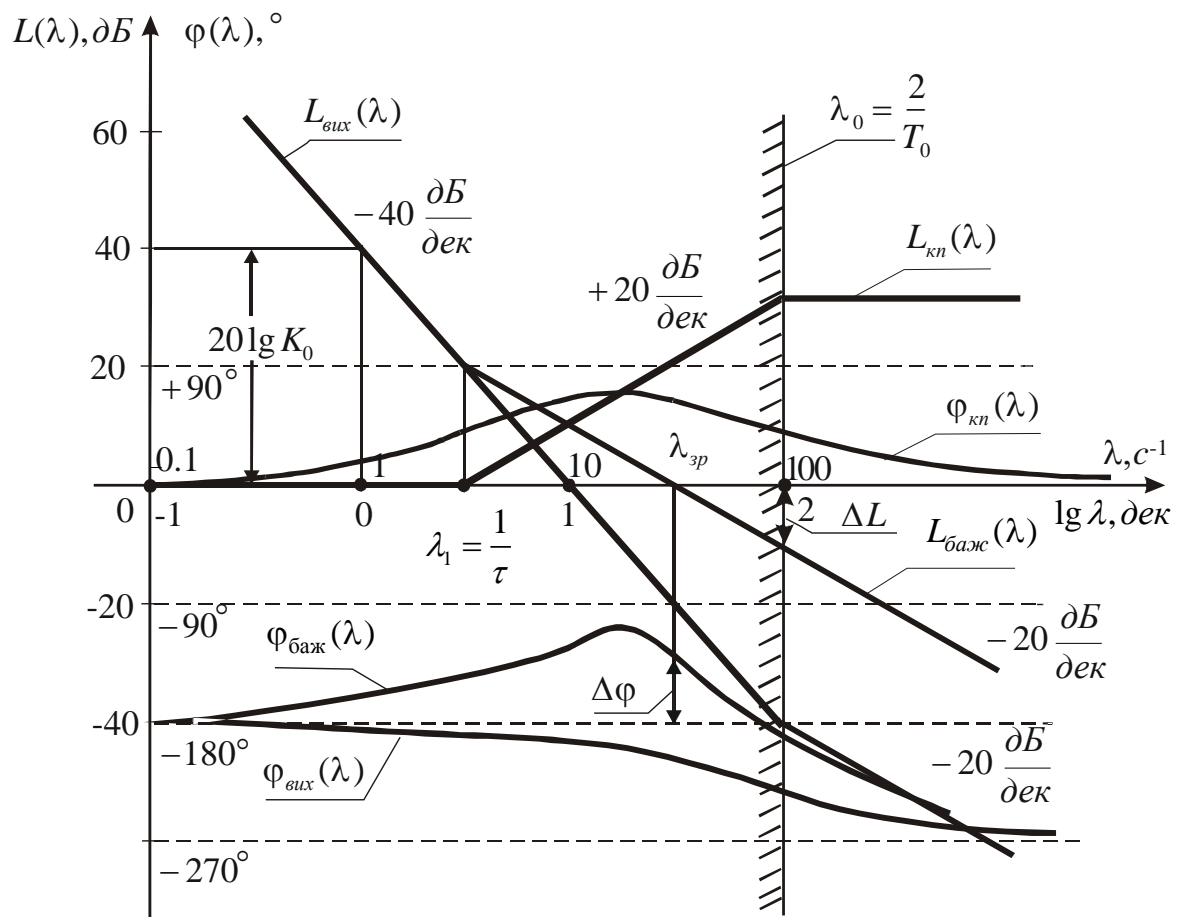


Рис. 2.40. Синтез цифрового коригувального пристрою методом логарифмічних псевдочастотних характеристик

Виконаємо дослідження синтезованої дискретної САК методом математичного моделювання. На рис. 2.41 представлені перехідні процеси регульованої величини $y(t)$ та сигналу керування $u^*(t)$ при східчастому завданні

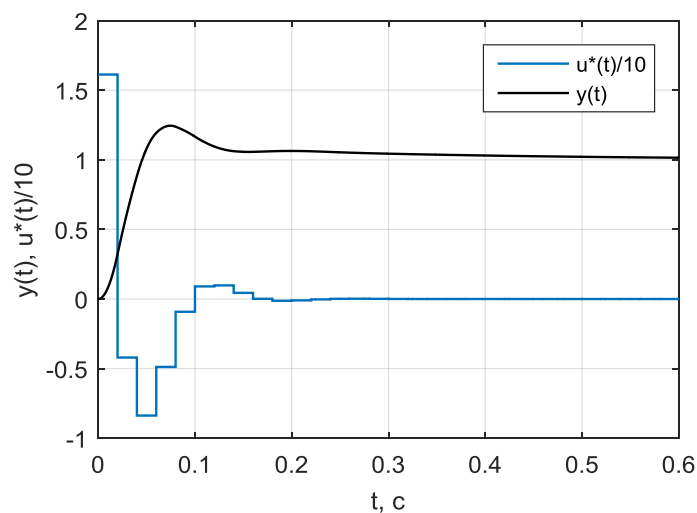


Рис. 2.41. Перехідні процеси у синтезованій дискретній САК

$g(t)=1(t)$. Аналіз кривої $y(t)$ показує, що у системі час регулювання $t_p = 0.3 \text{ c}$, а перерегулювання $\sigma = 25\%$.

Таким чином, показники якості синтезованої дискретної системи з цифровим коригувальним пристроєм повністю відповідають вихідним вимогам до САК. Отже задача синтезу є розв'язаною.

Література: [1, с. 552-560].

СРС: Задачі для самостійного розв'язання: Задача 2 [5, с. 55].

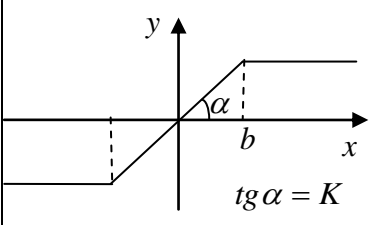
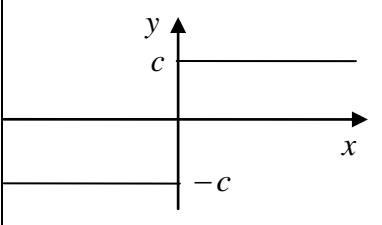
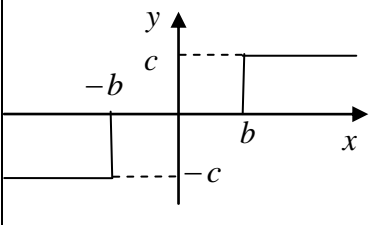
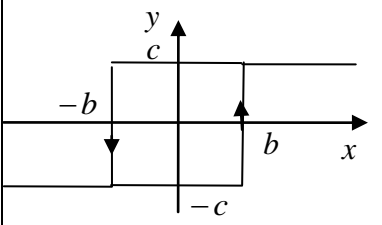
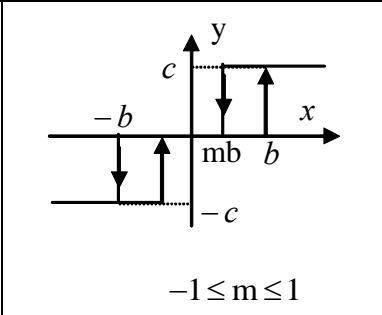
Література: [5, с. 53-55].

Контрольні запитання:

1. Викладіть методику синтезу послідовних цифрових коригувальних пристроїв за допомогою псевдочастотних ЛАХ.
2. Що визначає низькочастотна ділянка бажаної ЛАХ?
3. Якими є принципи побудови середньочастотної ділянки бажаної ЛАХ?
4. Як пов'язана швидкодія замкнутої системи з частотою зрізу ЛАХ розімкнутої системи?
4. Яка особливість синтезу методом псевдочастотних ЛАХ у разі немінімально фазового об'єкта керування?
5. Як отримати різницеве рівняння цифрового регулятора за його дискретною передатною функцією?

Додаток А

Коефіцієнти гармонічної лінеаризації типових нелінійностей

1. Нелінійність типу насичення		$q(a) = \frac{2K}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a} \right)^2} \right), a > b$ $q(a) = K, a < b$ $q'(a) = 0.$
2. Двопозиційне реле		$q(a) = \frac{4c}{\pi a},$ $q'(a) = 0.$
3. Трипозиційне реле		$q(a) = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a} \right)^2}, a > b$ $q'(a) = 0.$
4. Двопозиційне реле з гістерезисом		$q(a) = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a} \right)^2}, a > b$ $q'(a) = -\frac{4cb}{\pi a^2}.$
5. Трипозиційне реле з гістерезисом		$q(a) = \frac{2c}{\pi a} \left(\sqrt{1 - \left(\frac{b}{a} \right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{mb}{a} \right)^2} \right), a \geq b$ $q'(a) = -\frac{2cb}{\pi a^2} (1 - m), a \geq b.$ <p style="text-align: center;">$-1 \leq m \leq 1$</p>

Додаток Б

Перетворення Лапласа та z-перетворення

Функція часу $f(t)$	Перетворення Лапласа $F(s)$	z-перетворення $F(z)$
$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{T_0 z}{(z-1)^2}$
$\frac{t^2}{2}$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{T_0^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT_0}}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{T_0 z_a e^{-aT_0}}{(z-e^{-aT_0})^2}$
$1-e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{z(1-e^{-aT_0})}{(z-1)(z-e^{-aT_0})}$
$1-\frac{1-e^{-at}}{a}$	$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$\frac{z\left[\left(aT_0-1+e^{-aT_0}\right)z+A\right]}{a(z-1)^2(z-e^{-aT_0})}$ $A=\left(1-e^{-aT_0}-aT_0e^{-aT_0}\right)$
$1-(1+at)e^{-at}$	$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	$\frac{z\left\{\left[1-e^{-aT_0}-aT_0e^{-aT_0}\right]z+A\right\}}{(z-1)(z-e^{-aT_0})^2}$ $A=\left[e^{-2aT_0}+(aT_0-1)e^{-aT_0}\right]$
$e^{-at}-e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{(e^{-aT_0}-e^{-bT_0})z}{(z-e^{-aT_0})(z-e^{-bT_0})^2}$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2+b^2}$	$\frac{z \sin bT_0}{z^2-2z \cos bT_0+1}$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2+b^2}$	$\frac{z(z-\cos bT_0)}{z^2-2z \cos bT_0+1}$
$t \sin bt$	$\frac{2bs}{(s^2+b^2)^2}$	$\frac{T_0(z^2-1) \sin bT_0}{(z^2+1)^2-4z \cos bT_0(z^2-z \cos bT_0+1)}$
$t \cos bt$	$\frac{s^2-b^2}{(s^2+b^2)^2}$	$\frac{T_0 z(z^2+1) \cos bT_0-2T_0 z^2}{(z^2+1)^2-4z \cos bT_0(z^2-z \cos bT_0+1)}$
$e^{-at} \sin bt$	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$	$\frac{ze^{-aT_0} \sin bT_0}{z^2-2ze^{-aT_0} \cos bT_0+e^{-2aT_0}}$
$e^{-at} \cos bt$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$\frac{z^2-ze^{-aT_0} \cos bT_0}{z^2-2ze^{-aT_0} \cos bT_0+e^{-2aT_0}}$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Попович М.Г., Ковальчук О.В. Теорія автоматичного керування: Підручник. – 2-ге вид., перероб. і доп. – К.: Либідь, 2007. – 656 с.
2. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического управления – 4-е изд., – СПб, Изд-во «Профессия», 2003. – 752 с..
3. Phillips C., Harbor R. Feedback control systems, Prentice-Hall, 2000, 658 p.
4. Попов Е.П. Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления. – М.: Наука, 1988. – 256 с.
5. Нелінійні та дискретні системи автоматичного керування : метод. вказівки до практичних занять / Уклад.: В.Ф. Кудін, Б.І. Приймак. – К.: НТТУ “КПІ”, 2010. – 65 с. – Режим доступу: <http://ela.kpi.ua/handle/123456789/447>.
6. Гёльдер К., Кубик С. Нелинейные системы управления. – М.: Мир, 1987. – 368 с.
7. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т.2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. – М.: Физматлит, 2004. – 464 с.
8. Ким Д.П. Сборник задач по теории автоматического управления. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. – М.: Физматлит, 2008. – 328 с.
9. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления / В.А. Бесекерский [и др.]. – М. : Наука, 1978. – 512 с.
10. Острём К., Виттенмарк Б. Системы управления с ЭВМ /Пер. с англ. М.: Мир, 1987. – 480 с.
11. Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления / Пер. с англ. М.: Машиностроение, 1986. – 448 с.
12. Стрейц В. Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления/ Пер. с англ. – М.: Наука, 1985. – 296 с.

13. Изерман Р. Цифровые системы управления / Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 541 с.
14. Дроздов В.Н., Мирошник И.В., Скорубский В.И. Системы автоматического управления с микроЭВМ. – Л.: Машиностроение, Ленингр. отд., 1989. – 284 с.
15. Иванов В. А., Ющенко А. С. Теория дискретных систем автоматического управления. – М.: Наука. 1983. – 336 с.
16. Нелінійні та дискретні системи автоматичного керування : метод. вказівки до виконання розрахунково-графічної роботи / Уклад.: В.Ф. Кудін, Б.І. Приймак. – К.: НТТУ "КПІ", 2011. – 41 с. – Режим доступу: <http://ela.kpi.ua/handle/123456789/1489>.